ISTITUTO LOMBARDO
ACCADEMIA di SCIENZE e LETTERE



Rendiconti

CLASSE DI SCIENZE MATEMATICHE E NATURALI

Vol. 152
(2018)

Istituto Lombardo di Scienze e Lettere

MILANO
pISSN 1974-6989
eISSN 2384-986X

ISTITUTO LOMBARDO - ACCADEMIA di SCIENZE e LETTERE

RENDICONTI

CLASSE DI SCIENZE MATEMATICHE E NATURALI

Vol. 152
(2018)

Istituto Lombardo di Scienze e Lettere

MILANO

ISTITUTO LOMBARDO - ACCADEMIA DI SCIENZE E LETTERE

RENDICONTI

CLASSE DI SCIENZE MATEMATICHE E NATURALI

Responsabile scientifico
Carlo Domenico Pagani

Comitato di redazione
Silvio Beretta
Stefano Maiorana
Cinzia Bearzot
Carlo Domenico Pagani

Pubblicato con il contributo di
Politecnico di Milano
Università Cattolica del Sacro Cuore, Milano
Università Commerciale L. Bocconi, Milano
Università degli Studi dell'Insubria, Varese
Università degli Studi di Milano
Università degli Studi Milano-Bicocca
Università degli Studi di Pavia



Associato all'Unione Stampa Periodica Italiana

pISSN 1974-6989
eISSN 2384-986X
Copyright 2020



PAGEPress Publications
via A. Cavagna Sangiuliani, 5
27100 Pavia, Italy
T. +39.0382.464340
F: +39.0382.34872

TUMOR TARGETING WITH INTEGRIN LIGAND - DRUG CONJUGATES[1]

CESARE GENNARI (*)

Nota presentata dal m.e. S. Maiorana
(Adunanza del 18 gennaio 2018)

Drug targeting to tumors is a field of growing interest in modern oncology. Indeed, the main limitation of traditional chemotherapy is the unselective release of aggressive cytotoxic agents. As a consequence of this lack of selectivity, high drug dosages are required, causing severe side effects and thus affecting the overall efficiency of the therapy. A successful drug targeting approach is represented by the conjugation of extremely potent anticancer drugs to monoclonal antibodies (mAbs): by binding to tumor-specific antigens, the mAb enables the selective recognition of cancer cells. The drug load is then released in the intracellular environment upon receptor-mediated endocytosis. Four antibody-drug conjugates (ADCs) have recently reached the market: (i) ado-trastuzumab emtansine (Kadcyla®) is indicated for the treatment of patients with HER2-positive, metastatic breast cancer; (ii) brentuximab vedotin (Adcetris®) is indicated for the treatment of Hodgkin lymphoma and anaplastic large cell lymphoma; (iii) inotuzumab ozogamicin (Besponsa®) is indicated for the treatment of adults with relapsed or refractory B-cell precursor acute lymphoblastic leukemia (ALL); (iv) gemtuzumab ozogamicin (Mylotarg®) is indicated for adults with newly

(*) Università degli Studi di Milano, Dipartimento di Chimica, Milano, Italy. E-mail: cesare.gennari@unimi.it

1 Sintesi dell'intervento.

diagnosed CD33-positive acute myeloid leukemia (AML), and adults and children 2 years and older with relapsed or refractory CD33-positive AML. Although the ADC technology has been catching the interest of the world's biggest pharmaceutical companies, this approach presents several drawbacks: besides the high manufacturing costs, the administration of antibodies as drug carriers is often limited by pharmacokinetic issues (*e.g.*, difficult extravasation, low tissue diffusion, low accumulation inside the tumor mass) and by possible immune system-induced alterations of drug efficiency.

To trespass these limitations, small molecule-drug conjugates (SMDCs) have been proposed as a possible alternative to ADCs. Here, tumor targeting is effected by a small molecule (*e.g.*, an oligopeptide, a peptidomimetic or a vitamin), which is capable of selectively binding to tumor-overexpressed antigens. The main advantages of this approach compared to ADCs are better pharmacokinetics (due to the smaller size of the targeting agent) and an easier and more economical preparation.

In the field of SMDCs, integrin $\alpha_V\beta_3$ represents a very interesting target to be exploited for the selective delivery of anticancer agents within the tumor site.[1] Integrins are a large family of heterodimeric transmembrane glycoprotein receptors, composed by two non-covalently-associated subunits (α and β). The expression of integrin $\alpha_V\beta_3$ is increased in a variety of human cancer types (*e.g.* breast cancer, glioblastoma, pancreatic tumor, prostate carcinoma) with respect to healthy tissues. The increased expression of $\alpha_V\beta_3$ integrin in tumor cells is associated with different pathological features: angiogenesis, tumor growth, apoptosis resistance, and metastasis. Integrin $\alpha_V\beta_3$ recognizes endogenous ligands by the tripeptide arginine-glycine-aspartate (RGD) and also by the related sequence isoaspartate-glycine-arginine (*iso*DGR).

We have investigated the synthesis and biological properties of a new class of cyclic peptidomimetics containing a bifunctional diketopiperazine (DKP) scaffold and the tripeptide sequence Arg-Gly-Asp (RGD) [2,3] or *iso*Asp-Gly-Arg (*iso*DGR) [4] as potent integrin ligands. Competitive binding assays for the displacement of biotinylated vitronectin bound to purified $\alpha_V\beta_3$ integrin displayed excellent IC_{50} values, in the low nanomolar range [5]. The interaction of *cyclo*[DKP-RGD] ligands with intact cancer cells was investigated by NMR and computational studies, allowing the determination of the binding epitope and the bioactive conformation of the ligands [6]. *Cyclo*[DKP-RGD] and *cyclo*[DKP-*iso*DGR] ligands proved to be potent angiogen-

esis inhibitors and genuine integrin antagonists [7]. Since α_V integrins are overexpressed on the surface of cancer cells, integrin ligand-Paclitaxel conjugates were synthesized with the aim of using the tumor-homing *cyclo*[DKP-RGD] or *cyclo*[DKP-*iso*DGR] peptidomimetics for site-directed delivery of the cytotoxic drug [8,9,10]. Recently, multivalency was found to increase the binding strength of *cyclo*[DKP-RGD] peptidomimetic-Paclitaxel conjugates to integrin $\alpha_V\beta_3$ [11].

Integrin ligand-Paclitaxel conjugates were tested with isogenic cancer cell lines having different levels of integrin expression ($\alpha_V\beta_3$+ and $\alpha_V\beta_3$-) and displayed a remarkable Targeting Index [IC_{50}(cancer cells $\alpha_V\beta_3$-) / IC_{50}(cancer cells $\alpha_V\beta_3$+)] = 10^1. However, this value is much lower than those exhibited by ADCs (T.I. ca. 10^3). Therefore, despite the significant progresses that have been realized in recent years, integrin targeting SMDCs require additional fine tuning of the linker in order to improve the potency and the selectivity of the conjugates (*Fig. 1*).



Fig. 1.

ACKNOWLEDGEMENTS

I gratefully acknowledge MIUR (PRIN project 20157WW5EH "Tumor-targeting peptidomimetics: synthesis and bio-medical applications") and the European Commission (Marie Skłodowska-Curie ITN MAGICBULLET 642004 "Peptide-Drug Conjugates for Targeted Delivery in Tumor Therapy") for financial support.

REFERENCES

1. Dal Corso, A., Pignataro, L., Belvisi, L., Gennari, C. *Current Topics in Medicinal Chemistry* **2016**, *16*, 314-329.
2. Ressurreição, A. S. M., Vidu, A., Civera, M., Belvisi, L., Potenza, D., Manzoni, L., Ongeri, S., Gennari, C., Piarulli, U. *Chem. Eur. J.* **2009**, *15*, 12184-12188.
3. Marchini, M., Mingozzi, M., Colombo, R., Guzzetti, I., Belvisi, L., Vasile, F.,

Potenza, D., Piarulli, U., Arosio, D., Gennari C. *Chem. Eur. J.* **2012**, *18*, 6195 – 6207.

4. Mingozzi, M., Dal Corso, A., Marchini, M., Guzzetti, I., Civera, M., Piarulli, U., Arosio, D., Belvisi, L., Potenza, D., Pignataro, L., Gennari C. *Chem. Eur. J.* **2013**, *19*, 3563–3567.
5. For similar studies on integrin $\alpha_V\beta_6$, see: Civera, M., Arosio, D., Bonato, F., Manzoni, L., Pignataro, L., Zanella, S., Gennari, C., Piarulli, U., Belvisi, L. *Cancers* **2017**, *9*, 128.
6. (a) Guzzetti, I., Civera, M., Vasile, F., Araldi, E. M., Belvisi, L., Gennari C., Potenza, D., Fanelli, R., Piarulli, U. *Org. Biomol. Chem.* **2013**, *11*, 3886-3893. (b) Guzzetti, I., Civera, M., Vasile, F., Arosio, D., Tringali, C., Piarulli, U., Gennari, C., Pignataro, L., Belvisi, L., Potenza, D. *ChemistryOpen* **2017**, *6*, 128-136.
7. Panzeri, S., Zanella, S., Arosio, D., Vahdati, L., Dal Corso, A., Pignataro, L., Paolillo, M., Schinelli, S., Belvisi, L., Gennari, C., Piarulli, U. *Chem. Eur. J.* **2015**, *21*, 6265-6271.
8. Colombo, R., Mingozzi, M., Belvisi, L., Arosio, D., Piarulli, U., Carenini, N., Perego, P., Zaffaroni, N., De Cesare, M., Castiglioni, V., Scanziani, E., Gennari C. *J. Med. Chem.* **2012**, *55*, 10460-10474.
9. Dal Corso, A., Caruso, M., Belvisi, L., Arosio, D., Piarulli, U., Albanese, C., Gasparri, F., Marsiglio, A., Sola, F., Troiani, S., Valsasina, B., Pignataro, L., Donati D., Gennari, C. *Chem. Eur. J.* **2015**, *21*, 6921 – 6929.
10. Zanella, S., Angerani, S., Pina, A., López Rivas, P., Giannini, C., Panzeri, S., Arosio, D., Caruso, M., Gasparri, F., Fraietta, I., Albanese, C., Marsiglio, A., Pignataro, L., Belvisi, L., Piarulli, U., Gennari, C. *Chem. Eur. J.* **2017**, *23*, 7910-7914.
11. Raposo Moreira Dias, A., Pina, A., Dal Corso, A., Arosio, D., Belvisi, L., Pignataro, L., Caruso, M., Gennari, C. *Chem. Eur. J.* **2017**, *23*, 14410-14415.

LA GESTIONE DEL CICLO DELLE ACQUE TRA STORIA, SCIENZA E LETTERATURA

STEFANO POLESELLO (*)

Nota presentata dal m.e. C. Fuganti
(Adunanza del 1 febbraio 2018)

SUNTO. – Questa conversazione vuole presentare un *excursus* sul tema del rapporto tra acqua e uomo e della gestione dell'acqua tra storia, letteratura e scienza, dallo sviluppo delle prime civiltà alle più recenti conseguenze delle attività umane sugli ecosistemi acquatici, mostrando le soluzioni più recenti proposte per la gestione moderna del ciclo delle acque anche alla luce dei cambiamenti globali in corso.

***

ABSTRACT. – This lecture aims to present an *excursus* on the theme of the relationship between water and man and the management of water between history, literature and science, from the development of the first civilizations to the most recent consequences of human activities on aquatic ecosystems, showing the most recent solutions proposed for modern management of the water cycle also in light of the global change underway.

(*) Istituto di Ricerca sulle Acque del CNR, sede di Brugherio (MB), Italy.
E-mail: polesello@irsa.cnr.it

1. L'ACQUA: DALLA COSMOGONIA DELL'UNIVERSO ALL'OSSERVAZIONE NATURALISTICA

ἄριστον μὲν ὕδωρ
Ottima è l'acqua, l'oro come fuoco acceso
nella notte sfolgora sull'esaltante ricchezza
Pindaro - Olimpiche

È nozione comune fin dall'infanzia che la molecola dell'acqua sia indispensabile alla vita, ma non per tutti è ovvio che questo è dovuto alle sue intrinseche caratteristiche chimico-fisiche, cioè a come sono connessi gli atomi nella molecola e come vi è distribuita la densità elettronica. L'acqua è indispensabile alla vita perché è il miglior solvente e quindi il miglior mezzo di trasporto delle sostanze chimiche (sali, zuccheri ed aminoacidi, per esempio) indispensabili ai processi biologici catabolici e metabolici. Questo è possibile perché l'acqua ha un'elevata costante dielettrica (cioè la capacità di separare le cariche elettriche, proprietà indispensabile per allontanare gli ioni dal reticolo cristallino e quindi sciogliere le sostanze ioniche cioè i sali) ed ha la possibilità di formare forti legami a idrogeno con gruppi idrossilici (OH) presenti ad esempio negli zuccheri, solvatando così le molecole o gli ioni solubilizzati.

Che l'acqua fosse indispensabile alla vita è sempre stato evidente all'uomo che ha costruito sui fiumi le più grandi e antiche civiltà. La stessa topografia del giardino dell'Eden viene descritta in Genesi 2,10-14 in base alla sua idrografia [1]:

> *[10]Un fiume usciva da Eden per irrigare il giardino, poi di lì si divideva e formava quattro corsi. [11]Il primo fiume si chiama Pison: esso scorre intorno a tutto il paese di Avìla, dove c'è l'oro [12]e l'oro di quella terra è fine; qui c'è anche la resina odorosa e la pietra d'ònice. [13]Il secondo fiume si chiama Ghicon: esso scorre intorno a tutto il paese d'Etiopia. [14]Il terzo fiume si chiama Tigri: esso scorre ad oriente di Assur. Il quarto fiume è l'Eufrate.*

La prima Genesi della tradizione ebraica è simile alle cosmogonie mesopotamiche, che cominciano con l'emersione della terra dalle acque primordiali del caos e, metaforicamente, narrano come il suolo asciutto sorgesse dagli straripamenti annuali di Tigri ed Eufrate. Da un antico racconto della creazione di Ebla si dice addirittura che *fu allora che gli dei furono formati dal seno delle acque* [2]. La narrazione della creazio-

ne nei primi versetti della Genesi (Gn 1, 1-10) non narra in modo esplicito della creazione dell'acqua, che anzi è la materia primordiale su cui aleggia lo spirito di Dio (*Fig. 1*):

> *[1]In principio Dio creò il cielo e la terra. [2]Ora la terra era informe e deserta e le tenebre ricoprivano l'abisso e lo spirito di Dio aleggiava sulle acque. […] [6]Dio disse: "Sia il firmamento in mezzo alle acque per separare le acque dalle acque". [7]Dio fece il firmamento e separò le acque, che sono sotto il firmamento, dalle acque, che son sopra il firmamento. E così avvenne. [8]Dio chiamò il firmamento cielo. E fu sera e fu mattina: secondo giorno. [9]Dio disse: "Le acque che sono sotto il cielo, si raccolgano in un solo luogo e appaia l'asciutto". E così avvenne. [10]Dio chiamò l'asciutto terra e la massa delle acque mare.*



Fig. 1. Lo spirito di Dio aleggia sulle acque. Mosaico, Cattedrale di Monreale.

Per la Bibbia l'acqua ha un valore ambivalente: è il dono che come la parola di Dio scende dal cielo e feconda la terra (Is 55, 10-11), e allo stesso tempo può rappresentare l'abisso primordiale del caos che può inghiottire l'uomo. Il mare è il luogo stesso del Male da cui la Bestia dell'Apocalisse (Ap 13,1), il luogo dove viene gettato e ingoiato il profeta Giona per tre giorni (Gio 1,15). L'acqua può distruggere l'umanità come nel Diluvio o far nascere a vita nuova mediante il battesimo.

Questo ha ovviamente conferito all'acqua un valore altamente simbolico che ha condizionato il pensiero umano sull'acqua fino alla nascita del pensiero moderno. Un pensatore come Dante, ponendosi un problema scientifico sull'acqua nella *Quaestio de Aqua et Terra* [3], non riesce ad astrarsi da una visione cosmologica anche quando cerca di interpretare osservazioni ed evidenze dei "sensi". La questione dibattuta in questo breve libro riguardava il luogo e la figura o (meglio) la forma dei due elementi dell'acqua e della terra:

> *se l'acqua nella sua sfera, cioè nella sua superficie naturale, fosse in qualche parte più alta della terra che emerge dalle acque e che noi comunemente chiamiamo la «quarta (parte) abitabile»*

Dante, nella confutazione delle varie argomentazioni degli avversari, utilizza però nella parte finale anche le evidenze sensibili, mediate dall'autorità del Filosofo per eccellenza.

> *Infatti il volgo e le persone che ignorano i trattati dei fisici credono che l'acqua salga, proprio sotto forma di acqua, fino alle cime dei monti e al luogo delle sorgenti, ma ciò è assai puerile, poiché quivi le acque si formano per l'evaporazione della materia, come risulta dalla Meteorologia del Filosofo.*

Quindi in realtà, grazie alla divulgazione delle opere di Aristotele, nella cosmologia medievale, basata sulla Genesi, si innesta una prima intuizione del ciclo dell'acqua come evaporazione, condensazione, pioggia che forma i corsi d'acqua.

Bisogna aspettare Leonardo per avere un primo "ricercatore" dedicato ai temi dell'acqua, con la sua capacità di osservare, descrivere e disegnare tutti i fenomeni naturali, ma anche le sue limitazioni nel dare ordine sistematico, in un modo che noi chiameremmo scientifico, alle sue osservazioni e intuizioni. Leonardo già aveva intuito che il sistema acqua doveva essere studiato come un tutt'uno, che ciascuna parte

del ciclo delle acque era collegata all'altra, che ogni azione anche limitata ad una parte aveva effetto sulle altre. Leonardo progettò un trattato di cui scrisse l'indice e i contenuti principali, ma che, come per gli altri trattati, non venne mai concluso e pubblicato.

2. L'acqua come refluo e la sua gestione

L'égout, c'est la conscience de la ville. Tout y converge et s'y confronte.
V. Hugo, Les Misérables

2.1 Il collettamento dei reflui urbani

Il nostro immaginario dell'antichità è legato alle grandi opere idrauliche di adduzione dell'acqua delle grandi civiltà antiche che in molti casi caratterizzano ancora il paesaggio urbano e rurale del Mediterraneo. Il nostro pensiero corre immediatamente alle arcate degli acquedotti romani, o alla rete di gallerie scavate nel tufo di Napoli o alla cisterna dalle mille colonne di Istanbul. Queste grandi opere ingegneristiche nascevano dalla necessità di collettare e accumulare l'acqua anche in città che ne erano prive o in previsioni di assedi. La stessa Roma, pur attraversata da un fiume di discreta portata, necessitava di acqua pulita condotta da aree collinari o montuose distanti decine di chilometri.

La pianificazione urbanistica della distribuzione dell'acqua attraverso il sistema acquedottistico nasceva dalla consapevolezza che la qualità dell'acqua superficiale, specie in una zona intensamente urbanizzata, non garantiva la salubrità sufficiente per la potabilità. Quello che colpisce dell'ingegneria idraulica romana è non solo il sistema di adduzione e distribuzione dell'acqua "pulita", ma soprattutto la gestione, che oggi definiremmo integrata, del ciclo dell'acqua dalla sorgente allo scarico controllato delle acque reflue. Fin dall'epoca repubblicana a Roma vennero effettuati ingenti investimenti per la creazione di un sistema di collettamento e smaltimento delle acque luride. Per far ciò era necessario avere a disposizione grandi quantitativi di acqua pulita con una portata alta e costante che solo gli acquedotti potevano fornire. Una dello loro funzioni principali, meno nota ma altrettanto importante, era il lavaggio in continuo delle strade tramite lo stramazzo dei

castelli di distribuzione [4]. Questi flussi costanti di acqua venivano convogliati verso le cloache passando attraverso le latrine pubbliche, svolgendo una fondamentale opera di sanità pubblica. La più grande e famosa tra le cloache era la *Cloaca Maxima*, il cui sbocco nel Tevere è ancora visibile nei pressi del Ponte Rotto, anche se in realtà essa aveva lo scopo di drenare le acque di scolo naturale del Palatino per evitare l'impaludamento della zona dei Fori Imperiali e del Velabro. La forza dell'organizzazione imperiale era la capacità di riprodurre questi modelli di gestione idraulici anche nei centri urbani di tutto il territorio governato da Roma. Che il sistema fognario fosse uno degli aspetti più impressionanti della gestione urbana erano già coscienti i commentatori antichi come Strabone che nella Geografia (V.3.8) elogia i Romani per "*aver pensato a pavimentare vie, a incanalare acque, a costruire fogne che potessero evacuare nel Tevere tutti i rifiuti della città*".

Nonostante le grandi latrine pubbliche a più posti "a sedere" con impianti di lavaggio (*Fig. 2*), sistemi fognari, una specifica legislazione igienico-sanitaria, fontane e acqua potabile portata con acquedotti, le misure di igiene pubblica erano insufficienti per proteggere la popolazione dai parassiti diffusi dalla contaminazione fecale come dimostrato da studi recenti nei resti di latrine di città romane [5].



Fig. 2. Latrine di epoca romana negli scavi di Ostia.

Se la gestione delle deiezioni umane e dei reflui fognari era comunque insufficiente nell'antica Roma a garantire la salubrità pubblica, non riusciamo neppure ad immaginare che cosa potessero essere in termini di odore, sporcizia e rischio infettivo le città medievali che avevano lasciato andare in rovina gli antichi impianti di collettamento. Anche nei comuni italiani più avanzati nel Medioevo il collettamento avveniva attraverso canalette che scorrevano a cielo aperto nelle strade. Celebre ed esemplificativo è il passo della novella di Andreuccio da Perugia del Boccaccio [6]:

> *Era il caldo grande: per la qual cosa Andreuccio, veggendosi solo rimasto, subitamente si spogliò in farsetto e trassesi i panni di gamba e al capo del letto gli si pose; e richiedendo il naturale uso di dovere diporre il superfluo peso del ventre, dove ciò si facesse domandò quel fanciullo, il quale nell'uno de'canti della camera gli mostrò uno uscio e disse: - Andate là entro -. Andreuccio dentro sicuramente passato, gli venne per ventura posto il piè sopra una tavola, la quale dalla contraposta parte sconfitta dal travicello sopra il quale era; per la qual cosa capolevando questa tavola con lui insieme se n'andò quindi giuso: e di tanto l'amò Idio, che niuno male si fece nella caduta, quantunque alquanto cadesse da alto, ma tutto della bruttura, della quale il luogo era pieno, s'imbrattò. Il quale luogo, acciò che meglio intendiate e quello che è detto e ciò che segue, come stesse vi mostrerò. Egli era in un chiassetto stretto, come spesso tra due case veggiamo: sopra due travicelli, tra l'una casa e l'altra posti, alcune tavole eran confitte e il luogo da seder posto, delle quali tavole quella che con lui cadde era l'una.*

2.2 La costruzione dei moderni sistemi fognari

L'impulso decisivo alla costruzione del sistema fognario nelle grandi città europee furono le epidemie di colera tra il 1830 e la fine del secolo. Nel 1854 per la prima volta il medico inglese John Snow mise in correlazione la diffusione del colera con l'inquinamento dell'acqua di una fontana a SoHo, Londra, causata dalla contiguità tra pozzi neri e pozzi potabili, oltre all'uso di acque potabili prelevate dal fiume Tamigi.

Dal 1852 iniziò la costruzione dei sistemi fognari moderni di Londra e Parigi che ancora oggi sono l'ossatura dei loro impianti fognari. Alcune città italiane (tra le prime Firenze e Milano) iniziarono la costruzione dei nuovi sistemi fognari dopo l'unità d'Italia.

Il nuovo sistema fognario di Parigi diventa addirittura protagonista di un intero capitolo de "I Miserabili" di Victor Hugo [7]:

Parigi ha sotto di sé un'altra Parigi; una Parigi di fogne, con le vie, i crocicchi, le piazze, i vicoli, le arterie, la sua circolazione, fatta di fango al quale manca, però, la forma umana.

Oggi la fogna è linda, fredda, rigida, corretta, e realizza quasi l'ideale di ciò che s'intende in Inghilterra colla parola «respectable».

Un vero libello ambientale, riflette sia le preoccupazioni dello scrittore che del politico: partendo da una descrizione dantesca di questi luoghi sotterranei e dalla storia della loro costituzione, Hugo associa una riflessione sull'igiene dell'aria e l'acqua, sull'economia e la pianificazione urbana come condizioni per il progresso sociale.

3. La depurazione delle acque

[23]Arrivarono a Mara, ma non potevano bere le acque di Mara, perché erano amare. [25][Mosè] invocò il Signore, il quale gli indicò un legno. Lo gettò nell'acqua e l'acqua divenne dolce.
Es 15, 23-25

3.1 Lo sviluppo pre-moderno della purificazione dell'acqua

La tecnologia del collettamento dei reflui non è ovviamente sufficiente a garantire la sicurezza ambientale e sanitaria negli agglomerati urbani, poiché comunque tutto viene convogliato in acque superficiali che sono state usate da sempre come fonte di acque potabili, per l'igiene personale e per l'irrigazione. L'unica soluzione possibile è la depurazione delle acque reflue, cioè l'abbattimento delle sostanze chimiche o dei patogeni che, una volta diffusi nell'ambiente, possono presentare un rischio per gli ecosistemi e per gli essere umani.

Molti considerano l'episodio narrato al cap. 15 dell'Esodo (*Fig. 3*) il primo esempio di potabilizzazione delle acque e lo interpretano come un processo di scambio ionico in grado di sottrarre il magnesio, fonte principale del sapore amaro, mediante l'uso di specifici arbusti [8].

Nell'antichità molti autori (ad es. Plinio il Vecchio nella *Naturalis historia*) discussero metodi per dissalare l'acqua di mare. Traduttori arabi attribuirono ad Aristotele l'affermazione che l'acqua di mare diventa dolce per filtrazione attraverso le pareti di vasi di cera o di argilla, una storia ripetuta da molti commentatori fino al tardo Medioevo.

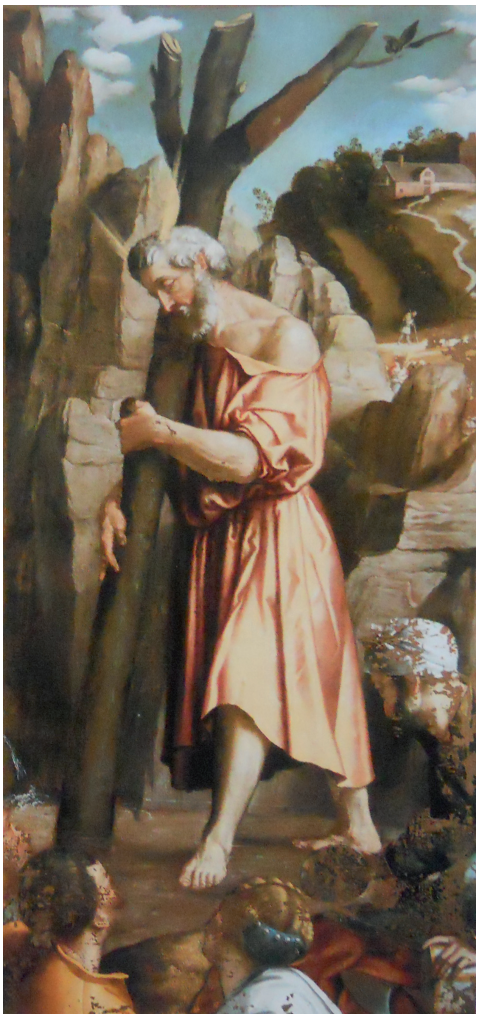


Fig. 3. Moretto da Brescia, Mosè addolcisce le acque di Mara.
Olio su tela, Collezione Privata, Brescia.

I Romani nei loro acquedotti sfruttavano ampiamente i processi di sedimentazione/decantazione nelle *piscinae limariae* che permettevano di evitare l'occlusione delle condutture e mantenevano salubre l'acqua fluente.

Tutta questa esperienza empirica trovò poi una sistematica appli-

cazione nel trattamento di acque potabili e reflue a partire dal XVII sec. Nel 1685 il fisico italiano Antonio Porzio inventò un filtro che consisteva in un'unità di sedimentazione e una di filtraggio a sabbia. Nel 1746 vi fu il primo brevetto per un sistema di filtraggio delle acque, poi applicato alle abitazioni a partire dal 1750.

Nel 1806 a Parigi fu messo in operazione un grande impianto per il trattamento dell'acqua. L'acqua sedimentava per 12 ore, prima di essere filtrata. I filtri erano costituiti da sabbia e carbone da legna e venivano sostituiti ogni sei ore. Nel 1827, l'inglese James Simpson costruì un filtro a sabbia per la depurazione dell'acqua potabile.

3.2 La nascita della moderna tecnologia di depurazione delle acque

La comprensione dei meccanismi di depurazione operanti in questi sistemi crebbe nel XIX sec. di pari passo con lo sviluppo della chimica analitica e soprattutto con l'esplosione degli studi di microbiologia. Era ormai chiaro che il solo collettamento dei reflui urbani per scaricarli in acque superficiali possibilmente a valle dell'abitato non evitava la diffusione epidemica dei patogeni, specie laddove la portata del corpo idrico recettore era paragonabile a quella degli scarichi immessi. Le fosse settiche perdenti, ampiamente usate fin dall'antichità e molto diffuse anche nel Medioevo specie nelle comunità monastiche e nei castelli, non erano una soluzione depurativa efficace in aree urbane intensamente abitate perché inquinavano i pozzi utilizzati per il prelievo di acqua potabile e dovevano essere svuotate molto frequentemente e smaltite sversandole nei fiumi o utilizzandole come ammendante nei campi.

Alla fine del XIX sec., a Berlino, risalgono le prime osservazioni sulla proprietà di auto-depurazione dei fiumi per ossidazione chimica spontanea di inquinanti organici e inorganici, ma ci vollero alcuni decenni perché si giungesse ad una visione condivisa del ruolo dei batteri nei meccanismi catabolici e anabolici coinvolti nei processi di degradazione [9]. I primi tentativi di risolvere il problema dei reflui urbani venne effettuato sempre a Berlino nell'ultimo decennio del secolo deviando gli scarichi verso "campi di spandimento", sfruttando la capacità di adsorbimento, filtrazione e degradazione microbica del suolo. Questa tecnica si diffuse in Germania a tal punto che sono attive da decenni alcune aree agricole (ad es. a Braunschweig) ora utilizzate per la ricarica artificiale della falda mediante infiltrazione di reflui urbani dopo opportuna depurazione.

L'origine di questa tecnica di smaltimento e riuso dei reflui a scopo di fertilizzazione si può far risalire alle coltivazioni di marcite delle Abbazie a sud di Milano, ma il suo sviluppo portò nei primi anni del XX sec. alla costruzione di campi artificiali con contenimenti costruiti in muratura allo scopo di massimizzare la capacità filtrante dei suoli.

Parallelamente iniziarono gli studi per sistemi di trattamento dei reflui che lavorassero in batch o in flusso continuo e che sono tuttora alla base delle tecnologie adottate nei depuratori tradizionali.

Le prime applicazione si basarono su sistemi cosiddetti primari basati sulla rimozione di solidi più pesanti per sedimentazione di gravità, tra i quali il più celebre è il cono Imhoff disegnato nel 1906 e tuttora in uso [10]. Depuratori primari, cioè col solo sedimentatore, sono stati lo standard di depurazione anche nei paesi avanzati fino agli anni '70, quando sono stati lentamente sostituiti da sistemi cosiddetti secondari. Il trattamento secondario utilizza microrganismi per convertire la sostanza organica nelle acque reflue in anidride carbonica, acqua ed energia per la crescita della biomassa microbica. Esistono due tipi base di trattamento secondario: a biofilm adeso ad una superficie o a biomassa sospesa detto anche a fango attivo. I primi impianti a biofilm adeso su filtro vennero sperimentati alla fine del XIX sec. in Gran Bretagna e si diffusero in molte città del Regno Unito fin dagli anni venti. Nella stessa nazione vennero brevettati e sperimentati i primi impianti a flusso continuo con trattamento a fango attivo con insufflazione di aria a partire dagli anni '20. Questa tipologia di trattamento delle acque si diffuse lentamente nei paesi più sviluppati finché nel 1972 il Clear Water Act degli Stati Uniti lo impose come lo standard di trattamento delle acque. Da questo momento nasce la storia moderna del trattamento delle acque reflue [10].

4. Presente e futuro del trattamento delle acque reflue: da problema a risorsa nell'ottica dell'economia circolare

4.1 I sistemi di trattamento biologici

Dagli anni '70 si diffusero in tutto il mondo impianti di depurazione basati sulla degradazione biologica delle sostanze organiche e inorganiche di origine metabolica. Lo schema prevalente negli impianti delle grandi città è stato quello della sequenza di vasche di sedimenta-

zione e impianti di trattamento biologico con biomassa sospesa e ricircolo del fango attivo. Uno dei problemi fondamentali affrontati da questi impianti è stato quello di abbattere la concentrazione in uscita di composti azotati e fosforati che davano luogo a significativi processi di eutrofizzazione nei corpi idrici recettori con ripercussioni significative anche nell'ambiente marino.

La rimozione del fosforo dall'acqua reflua è stata effettuata mediante l'incorporazione di fosfati in solidi sospesi e la successiva rimozione da tali solidi. Il fosforo può essere incorporato sia in solidi biologici, cioè nella biomassa microbica, che in precipitati chimici, mediante opportuni flocculanti.

L'azoto, presente nei reflui in prevalenza come ammoniaca o ammine, deve essere sottoposto ad un trattamento biologico ossidativo di nitrificazione (cioè la trasformazione da ammoniaca a nitrato), con l'ausilio di aria insufflata, e successiva denitrificazione in ambiente anaerobico per ridurre il nitrato ad azoto gassoso liberabile in atmosfera.

L'eutrofizzazione è stato il problema ambientale dominante nel campo della protezione delle acque fino almeno agli anni '90, quando esplose l'emergenza per la produzione elevata di mucillagini nell'alto Adriatico da parte di alghe fertilizzate dall'apporto di nutrienti del bacino padano tramite il fiume Po. Una delle cause principali di questa situazione non controllabile venne indicata nell'assenza di impianti di trattamento dei reflui urbani di Milano che entrarono in funzione solo nel 2005.

Per capire l'importanza della depurazione mostro un esempio di una ricerca condotta da un gruppo di ricerca del mio istituto (Istituto di Ricerca sulle Acque, IRSA-CNR), guidato dal dott. Tartari, per la misurazione del livello di fosforo nel lago di Pusiano nel corso degli ultimi 30 anni [11]. Come detto in precedenza il fosforo funge da fertilizzante per la crescita di biomassa algale che porta al fenomeno conosciuto come eutrofizzazione. Il problema grave è che la biomassa algale man mano che muore deposita al fondo e consuma ossigeno per la sua degradazione, portando il lago in breve tempo in condizioni anossiche, cioè privo di ossigeno e quindi di vita. Questa era la situazione ed il destino 30 anni fa di tutti i laghi prealpini lombardi non profondi. Nel caso del lago di Pusiano, studiato dall'IRSA, il collettamento circumlacuale dei reflui verso un nuovo impianto di trattamento a Merone ha portato ad una notevole riduzione del carico inquinante a lago (*Fig. 4*) [12]. Il problema è che ad un certo punto, benché sia cresciuta la percentuale di popolazione trattata il fosforo non diminuisce più: uno stu-

dio recente del nostro istituto ha dimostrato che una delle sorgenti di questo carico residuo sono gli scolmatori di piena: quando piove, poiché il depuratore e le tubazioni non possono sopportare il carico idraulico, parte degli scarichi vengono direttamente scolmati, cioè scaricati nei torrenti che vanno al lago: Questo ci dice quanto sia urgente mettere in atto una soluzione non difficile dal punto di vista tecnico come la separazione delle acque di fognatura da quelle di dilavamento.

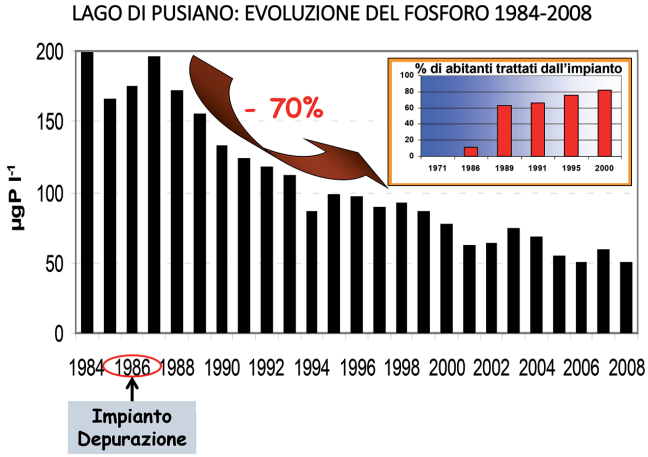


Fig. 4. Evoluzione temporale delle concentrazioni di fosforo (in µg P/L) nel Lago di Pusiano, Lombardia.

4.2 I sistemi di trattamento avanzati nell'economia circolare dell'acqua

L'aumento delle conoscenze sul destino delle molecole provenienti da attività umane e immesse nell'ambiente, grazie anche al grande sviluppo tecnologico delle strumentazioni analitiche, ha evidenziato il rischio per l'uomo e gli ecosistemi di un grande numero di sostanze, anche di uso domestico e quotidiano, detti convenzionalmente "inquinanti emergenti" che sono continuamente scaricati nei fiumi europei o raggiungono le falde utilizzate per il prelievo di acqua destinata al consumo umano. Oggi il problema principale della depurazione è abbattere il carico inquinante di una città o di una vasta area cercando di riversare nel corpo idrico recettore un'acqua che non comporti rischi per l'ecosistema acquatico. Gli attuali depuratori standard sono basati sul principio della sedimentazione e degradazione biologica della materia organica e in parte dei metalli, men-

tre sono poco efficaci con le molecole di sintesi scaricate dall'uso comune come farmaci o prodotti per la cura della persona. Lo sviluppo attuale è di aggiungere stadi di trattamento ulteriori (cosiddetti terziari) mirati a queste sostanze, in modo da produrre acqua di qualità "potabile". I trattamenti cosiddetti terziari si basano su tecnologie di ossidazione avanzata e adsorbimento/filtrazione, spesso proposti in una sequenza di trattamenti combinata disegnata su misura sulla tipologia e la composizione di acque da trattare e soprattutto in funzione dell'uso dell'acqua trattata. Le tecniche di ossidazione avanzata si basano su una combinazione di agenti ossidanti (ad es. O_3 e H_2O_2) talvolta accoppiati con altre specie chimiche (catalizzatori metallici, es. Fe^{2+}) o con agenti fisici (radiazione UV o ultrasuoni) in modo da incrementare l'efficienza di eliminazione dei contaminanti più recalcitranti per mezzo di un aumento della formazione di radicali liberi. L'obiettivo è quello di degradare le molecole originarie a composti più semplici o più eliminabili per mezzo di un successivo trattamento di adsorbimento su una fase solida attiva, come il carbone o di filtrazione/adsorbimento come l'osmosi inversa o ultrafiltrazione: questi sistemi possono essere accoppiati ad un trattamento biologico secondario effettuato però con una biomassa molto più concentrata adesa sulla membrana.

Nell'ottica dell'economia circolare, fortemente incentivata dall'Unione Europea, l'obiettivo di questi trattamenti è quello di garantire in uscita ai depuratori acqua trattata utilizzabile per altre attività umane, come l'irrigazione agricola e urbana e la ricarica di falda mediante infiltrazione sul suolo, nell'ottica di garantire un quantitativo costante di acqua di qualità sufficiente a contrastare la crescente richiesta di acqua a fronte di una sempre più ridotta disponibilità, soprattutto nelle regioni mediterranee, a causa dei cambiamenti climatici in corso.

Il riutilizzo delle acque reflue urbane – sia non trattate sia trattate - è stato praticato per molti secoli con l'obiettivo di deviare le deiezioni umane al di fuori degli insediamenti urbani. Il riutilizzo dell'acqua come attività pianificata è iniziata circa un secolo fa con l'uso di effluenti trattati per l'irrigazione dei parchi pubblici. Da allora le applicazioni di riutilizzo dell'acqua non potabile sono cresciute in modo sostanziale dall'irrigazione del paesaggio urbano all'irrigazione di colture alimentari, dall'uso come acqua di raffreddamento, negli impianti di autolavaggio, antincendio, fontane pubbliche, come mezzo di incremento delle portate fluviali alle barriere di intrusione dell'acqua di mare. Con l'introduzione dei trattamenti terziari e il conseguente miglioramento della qualità degli effluenti e la concomitante diminuzione della disponibilità

locale di acqua dolce, il riutilizzo delle acque reflue urbane trattate è stato preso in considerazione anche per aumentare le forniture di acqua potabile fin dagli anni '60 con applicazioni pionieristiche negli Stati Uniti d'America (USA) e in Namibia. Oggi, il riutilizzo di acqua potabile pianificato è riconosciuto in tutto il mondo come una componente sempre più importante della gestione delle risorse idriche regionali con un numero crescente di progetti consolidati. I progetti di riutilizzo dell'acqua potabile pianificati sono caratterizzati come diretti o indiretti [13]. Città come Singapore o Windhoek (Namibia) immettono in modo diretto negli acquedotti una aliquota significativa di acqua in uscita dai depuratori urbani dopo una sequenza di trattamenti avanzati. Il riutilizzo indiretto di acqua potabile viene definito invece come l'aggiunta intenzionale di acque reflue trattate ad un sistema di accumulo naturale o artificiale utilizzato per la fornitura di acqua potabile. Queste aree di accumulo possono essere una falda acquifera naturale o un serbatoio lacuale artificiale con l'intento di fornire ritenzione, attenuazione aggiuntiva dei contaminanti e miscelazione prima dell'uso come acqua potabile. Città come Las Vegas, in pieno deserto, ricaricano già i bacini di approvvigionamento idrico con l'acqua trattata dai depuratori urbani.

Il nostro istituto IRSA-CNR ha recentemente partecipato al progetto europeo FRAME per lo sviluppo di tecnologie e protocolli di riutilizzo potabile attraverso la ricarica delle acque sotterranee mediante infiltrazione di acqua trattata attraverso la zona vadosa per dispersione superficiale.

5. Conclusioni

Il campo di ricerca degli studi ambientali sull'acqua ed in particolare sulle tecnologie di depurazione mostra chiaramente come oggi sia del tutto privo di senso cercare una linea di demarcazione o una contrapposizione tra ricerca pura e applicata, che invece sono intrecciate e al massimo complementari, come la storia del nostro istituto ha sempre messo in pratica dalla sua fondazione. Colgo l'occasione perciò per chiudere con le parole di Leonardo, grande osservatore del mondo naturale, ma anche ricercatore di soluzioni a problemi pratici:

> *Quando tu metti insieme la Scienza de' moti dell'acqua, ricordati di mettere, di sotto a ciascuna proposizione, li sua giovamenti, a ciò che tale scienza non sia inutile* [14]

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

1. *La Sacra Bibbia*, Conferenza Episcopale Italiana, Roma, 2008.
2. Bandini F, *E fu sera e fu mattina: primo giorno. I miti della creazione e delle origini della vita tra eros e ethos*, Alinea Editrice, Firenze, 2006.
3. Alighieri D, *Tutte le Opere*, Sansoni Editore, Firenze, 1965.
4. Pace P, *Acquedotti di Roma e il De aquaeductu di Frontino*, Consiglio Nazionale delle Ricerche, Roma, 2010.
5. Mitchell PD, Human parasites in the Roman World: health consequences of conquering an empire, *Parasitology*, 2017: 144: 48-58.
6. Boccaccio G, *Decameron*, Le Monnier ed., Firenze, 1951-1952.
7. Hugo V, I Miserabili, Garzanti ed., Milano, 1981.
8. Ettre LS, Was Moses the First Chromatographer? Chromatography in the Ancient World, *LCGC North America*, 2006: 24: 1280-1283.
9. Wiesmann U, Choi IS, Dombrowski EM, *Fundamentals of Biological Wastewater Treatment.* Wiley-VCH Verlag GmbH & Co., Weinheim, Germany, 2007.
10. Lofrano G, Brown J, Wastewater management through the ages: A history of mankind, *Science of the Total Environment* 2010: 408: 5254-5264.
11. AAVV, *Qualità delle acque lacustri in Lombardia - 1° Rapporto Osservatorio dei Laghi Lombardi 2004*, Regione Lombardia, ARPA Lombardia, Fondazione Lombardia per l'Ambiente e IRSA/CNR, Milano, 2005
12. Sangalli L, *Evoluzione della qualità chimica e fisica nei laghi di Alserio e Pusiano*, Parco Regionale della Valle del Lambro, www.parcovallelambro.it
13. Drewes JE, Horstmeyer N. *Recent Developments in Potable Reuse*, Springer International Publishing, Switzerland, 2015.
14. Leonardo da Vinci, *Aforismi, novelle e profezie*, Newton Compton ed., Roma, 1993.

Istituto Lombardo (Rend. Scienze) 152, 23-58 (2018)

GRAVITATIONAL WAVES, 100 YEARS LATER

SERGIO LUIGI CACCIATORI (*)

Nota presentata dal m.e. Carlo Domenico Pagani
(Adunanza del 1 marzo 2018)

Sunto. – In questa breve nota vogliamo esporre i principali risultati riguardanti la rivelazione diretta di onde gravitazionali nel periodo che va dal settembre 2015 al marzo 2018, rese possibili dagli sforzi congiunti dei progetti LIGO e Virgo. Data l'importanza di tali risultati, ci si vuole rivolgere ad un pubblico non necessariamente di specialisti, minimizzando le espressioni matematiche in favore di una spiegazione dettagliata dei fenomeni fisici pur senza sacrificarne la precisione. La nota è dunque divisa in due parti: nella prima parte verranno esposte le idee principali che hanno portato Einstein a sviluppare la teoria della relatività ristretta prima e quella generale poi, e come queste abbiano rivoluzionato la nostra concezione di spazio e di tempo. Nella seconda parte vedremo come la teoria di Einstein preveda l'esistenza di onde gravitazionali. Vedremo in che modo esse sono state misurate, e quali siano le importantissime conseguenze di tale scoperta.

* * *

Abstract. – We present a short communication on the recent direct measurements of gravitational waves, made possible by the joint efforts of the LIGO and the Virgo projects. These notes are devoted to a broad audience. In the first part we will present the basic ideas of the theory of relativity, leading to the prediction of the existence of gravitational waves. The second part is devoted to present the main results and consequences of the discovery.

(*) Università dell'Insubria, Dipartimento di Scienza e Alta Tecnologia, Como. INFN, Milano, Italy. E-mail: sergio.cacciatori@uninsubria.it

1. Einstein and the new vision of the universe

1.1 Relativity of space and time

In the *annus mirabilis* 1905, with the work *Zur Elektrodynamik Bewegter Körper* [1], Albert Einstein started his revolutionary modification of the conceptions of space and of time, replacing them with the more fundamental concept of *spacetime*. Einstein's spacetime, whose geometry has been clarified by Hermann Minkowski in 1908, [2], is more known under the name of Minkowski's spacetime. It is a four dimensional space, with three spatial directions and one temporal direction. But this does not mean that it can be obtained simply by adding to the three spatial directions a fourth one, the line of time. The Einstein's spacetime is an absolute object just like it was the space for Newton. The point is now that spacetime does not split in a natural way in space and time. Such a splitting can be done only after choosing a reference frame, that is by placing everywhere a clock in such a way to be sure that all clocks tick in the same manner and to be able to synchronise them. If all these operations can be performed, that is if all our clocks tick in the same way and remain synchronised, then we have defined a time, the timelike direction, and, thus, also the notion of space. The space is the set of points of spacetime that correspond to a fixed instant "t". It is the set of all synchronised clocks indicating the same time.
With this definition, the timelike direction, as well as the flowing of time, depends on the choice of a reference system. If a group of sailors sitting on the benches in the dock of a haven can verify that their clocks tick identically and are perfectly reciprocally synchronised, and the same is realised by a group of sailors sitting down on the deck of a boat that is outgoing the harbour, each group will see that the clocks of the other group will appear not to be synchronised but signing different times. But there is more: if at a certain time one of the clocks at land indicated exactly the same as one of the clocks of the boat, after a while this would be no more true and each one of the two sailors, owners of the clocks, would realise that the time for the other sailor is flowing differently than for him, despite the clocks, let assume, are identical by construction.
All this happens because space and time are relative and not absolute: they depend on the choice of a reference system. The spacetime is the only thing that can be absolute without conflicting with physical prin-

ciples. In any inertial frame we are allowed to adopt any convention to define a point of space, as long as it is realisable with an experiment compatible with the laws of physics, valid in the same way in any inertial system. This means that (assuming they are inertial) each sailor in the above example can assume to individuate an arbitrary point of the space, for example, by identifying it with the tip of the forefinger of his right hand. But, then, the sailors on the dock will see the points indicated by the sailors on the boat as changing time by time, since the boat is moving. And vice versa. Despite both have the same right of deciding what a point of space is, they cannot be right at the same time if we assume that indeed a space does exist. The best we can do is to assume that "the space" does exist. After that, it could be the one defined by the sailors at land, or the one of the sailors on the boat or none of them. And, obviously, there is no way for the sailor to establish who is right or, if it is not, what the real space is. This is the problem of absolute space in Newtonian physics: we must introduce it, but we cannot "see" it.

In the Einstein viewpoint this problem disappears, since absolute space does not exist, and each frame, the dock and the boat, has its own space, compatibly with the physical laws. The space looses its absoluteness in favour of an absolute spacetime thus paying the price that also the time must become relative. *But a new problem arises now!* In order to describe the physics and the evolution of the world around us, we need to distinguish time from space, since we have to describe the change of a given system when time flows. So, if time flows in a different way as we change the observer, does the laws of physics also change accordingly to the observer?

The answer is *Yes* and *No*, but, of course, requires some explanation: *Yes* because we cannot avoid the changes of the explicit expression of any formula as function of space and time if space and time change; *No* in the sense that the new formulas keep the same form after the change, in such a way that, when we translate them in words, they give the same law. One expresses this by saying that formulas are *covariant*.

1.2 Special Relativity

Above we referred to the laws of physics, by these meaning the Newton's laws of mechanics. In this respect we considered inertial frames,

since the concept of an inertial system is basic in Newton's mechanics. *Special Relativity* is a theory of relativity based on such fundamental concept and, therefore, it privileges inertial systems.
A reference system is said "inertial", if any pointlike mass it contains, which is isolated so that no forces act on it, moves with constant velocity (eventually zero) along a straight line (uniform rectilinear motion).
Any uniform rectilinear motion in an inertial frame is said to be an *inertial motion*.
The covariance of the theory must then be realised into the inertial frames, which means that the laws of physic must keep the same form when we pass from an inertial frame to another one, and, therefore, they are particularly relevant when formulated in such the frame. After that, it is quite simple to determine the transformation rules telling us how to pass from an inertial frame to another, as well as the mathematical expression of the physical laws transforming according to these rules and, finally, how they can be written in a way that is independent from the specific choice of an inertial system. This requires the introduction of the concept of tensors, objects whose definition is independent from the choice of an inertial frame, in the same way as the components along the coordinate axes of a vector on a plane depend on the choice of the axes, but the vector itself, of course, does not. Here, we do not intend to deduce nor discuss in details such transformation rules. Nevertheless, let us see in a moment what are the first principles on which they are determined, and a couple of consequences that will be useful later on. The point is that, in passing from an inertial frame to another one, space and time are modified, without changing the spacetime, in such a way that the following rules are satisfied:

- Since both reference systems are inertial, each inertial motion must be transformed into another inertial motion;
- In passing from an inertial frame to another, space and time are modified in such a way to keep invariant the modulus of an *absolute velocity*, that is, a special velocity whose modulus V is independent on the choice of the (inertial) reference system in which the measurements are performed.

The first issue is perfectly obvious and compatible with our common sense. In particular, it allows us to conclude that, given a particular inertial frame, every other inertial frame is made by observers all moving

with exactly the same velocity (w.r.t. the fixed frame, possibly with the axes oriented in an arbitrary way, and with a different choice of the origin of space and time) so that they are reciprocally at rest, and appear to have an inertial motion as seen by observers at rest in the first frame (and vice versa). On the opposite, the second issue is completely counterintuitive, very far from our common sense originated by our daily experience. If a car is shooting at 120km/h on the highway and we run after it at 100km/h, we will see it moving away from us at a speed of 20km/h. Or, at least, this is what it will appear to us: the speed of a car depends on the reference frame with respect to which it is moving. *But it is not the same for the absolute speed V!* This is what the second issue is claiming. If a car is shooting at a speed V and we run after it with speed $V/2$, we will not see it moving away from us with velocity $V/2$ but with velocity V, as if we were at rest. This may look quite odd, but it is exactly what was postulated by Einstein, with V equal to the speed of light, after an experiment by Michelson and Morley at the end of the XIX century.
The point is that our daily perception of the world is approximated, and the conclusions we can deduce from them may be wrong too when we check them with sufficiently high accuracy. This is why physics tries to found its principles on objective experiments, which are experiment independent from our common sense as much as possible.

1.3 The Michelson and Morley experiment

It is interesting for us to discuss the Michelson and Morley experiment because the apparatus they invented for their experiment is substantially the same used to prove the existence of gravitational waves.
The most precise measurement of the speed of light performed on the Earth has given the result

$$c = 299792458 m/s$$

with an error on the decimals that we don't care for reasons that will be clear in the next section. We also know that the Earth is nearly $150 \cdot 10^6$Km far away from the Sun, and moves around it in one year, t.i. nearly $3.15 \cdot 10^7$ seconds. It follows that the Earth runs around the Sun with a velocity v of about

$$v \approx 30 Km/s = 30000 m/s,$$

much larger than the precision at which we know the speed of light. Suppose we want to measure the speed of the light emitted by a fixed star belonging on the plane of the terrestrial orbit. Then, there will be a period of the year when the Earth is moving toward the star with velocity v, and, of course, six months later it will move in the opposite sense with the same velocity. A simple reasoning shows that if we measure the speed of the light of the fixed star in the two periods, we should expect to get the results $c_+ = c + v$ and $c_- = c - v$ in the respective periods of the year. In particular, we should get $c_+ - c_- = 2v$, sensibly observable since it is much larger than the precision in measuring c.
In order to measure such differences of velocities, Albert Abraham Michelson, an American physicist of Prussian origin, alone in 1881 [3] [4] A. A. Michelson, *Relative Motion of Earth and Aether,* Philosophical Magazine 8 (1904): 716–719; and then with the help of the American Chemist and Physicist Edward Williams Morley in 1887 [5] [6], realized the following apparatus, *the Michelson and Morley interferometer*.

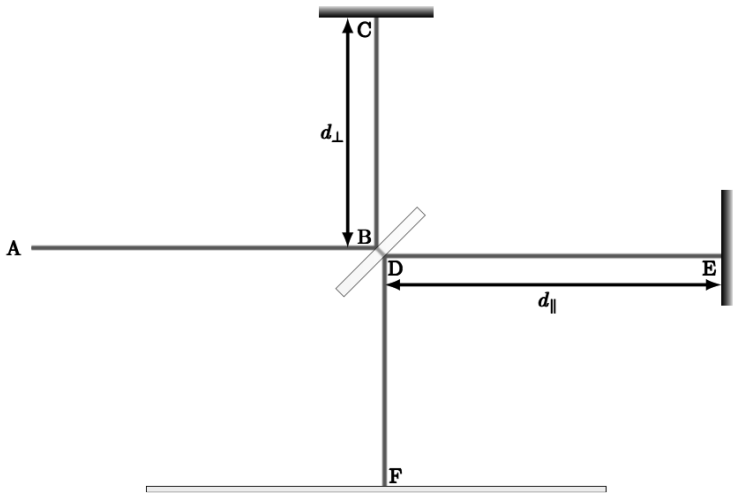


Fig. 1 – The Michelson and Morley interferometer.

It is based on a simple but efficient principle: let suppose that luminous signal comes from A, toward a beam splitter in B, that is a lens

that splits the signal into two beams, the first one following the path $BCBDF$, and the second one following the path $BDEDF$, where in C and E there are two mirrors and in F a screen. The two beams thus follow essentially the same path, except the parts BCB for the first one and DED for the second one. In F they will meet again, there producing an interference figure, which will be a luminous point if they arrive with the same phases and a dark point if they arrive with the opposite phases. This difference of phases depends on the differences in the traveled paths. Suppose for example that from A it is arriving the light from the fixed star and the apparatus is moving in the AB direction with velocity v (the velocity of the Earth). Then, if our common sense is right, the path DE is traveled by the light with velocity $c - v$ whereas ED is traveled with velocity $c + v$. On the opposite, BC and CB will be traveled with the same velocity. The difference between the phases will depend on these different behaviours and on the lengths $L_{\parallel}$ and $L_{\perp}$ of the two arms.

If we rotate the system by 90 degrees, then the roles of the two arms will interchange and the difference of phases will change. So suppose that we first take the former configuration, like in the picture, and regulate $L_{\perp}$, so varying the difference between the phases until the interference becomes negative and the screen becomes completely dark. If next we rotate the apparatus then interchanging $L_{\parallel}$ with $L_{\perp}$, the light will now travel the arm $L_{\perp}$ back and forth with different velocities, and the other arm with the same velocity so that we expect a change in the difference of the phases and, so, a new interference picture should appear.

But no interference pictures appeared in the Michelson and Morley experiment, exactly as if both the arms had traveled back and forth with exactly the same velocity.

Several possible explanations appeared, based on different strange properties of aether, but the simplest one, proposed by Einstein, was that aether actually does not exist and the light moves in vacuum with an absolute velocity. Of course, his proposal was a theoretical extrapolation since we are living on the Earth that does not constitute an inertial frame. However, each measurement by Michelson and Morley took a short time, during which the displacement of the Earth is very small compared to the radius of its orbit, of about $150 \cdot 10^6$Km, so that in such time intervals its motion can be considered as inertial. Nowadays we know that the postulate of absoluteness of the speed of light can

be replaced by the requirement that the space should be isotropic and homogeneous, and that time must be homogeneous, for any choice of an inertial frame. Together with the preservation of the principle of inertia, one can show that this allows to prove the existence of an absolute velocity V, which may be infinite (in such case one gets the usual Galilean theory of relativity) or finite. In light of this, the fact that the value of V coincides with the speed of light c is not a principle but a mere accident. On the opposite, we could say that it is the speed of light to be (accidentally) equal to the absolute velocity, as a consequence of the covariance of the Maxwell equations, which are the equations describing the electromagnetic phenomena. Whereas the existence of an absolute velocity is a general kinematical fact related to fundamental principles, the Maxwell equations are just a specific model describing light, and the requirement that they maintain the same form in any inertial frame fixes the speed of light to coincide with the absolute velocity.

1.4 Some consequences of Special Relativity

Once accepted the absoluteness of the speed of light, there is no more reason to improve its measurements with respect to fixed choices of units of length and of time! After defining the unit of time, the second s, we can define the unit of length, the meter m, so that the speed of light is exactly (and not an approximate value)

$$c = 299792458 m/s.$$

In this sense the velocity looks more fundamental then a length, which is now derived by the definition of time and velocity. This allows getting precise definitions of some units of measure. The Cesium is a radioactive material that, when excited, emits a particular electromagnetic radiation oscillating 9192631770 times each second. Indeed, one uses this precise measure in order to define what a second is: it is the time employed by the radiation of Cesium to have the above number of oscillations. With this precise definition of second, we can define the meter to be the length traveled by light in vacuum in a fraction 1/299792458 of one second.
But there are at least three further consequences of Einstein's postulates that we want to mention now, without pretending to deduce any of them.

Lengths contraction

Let us consider an observer at rest just to the side of the highway of an inertial frame, looking a car of length L_0 running with velocity v. To him, the length of the car will be

$$L = L_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

so that it will appear shorter than with respect to the driver (whereas he will agree about the other sizes, transversal to the direction of motion). This phenomenon is called *contraction of the length*.

Time dilation

If the above observer measures the lapse of time between two successive cardiac pulses of the driver, that for the pilot himself is Δt_0, he will find

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

which is a longer time. This is the *time dilation*. All the processes in the cabin of the car will appear to be slowed down from the observer's viewpoint, standing by the road.

Rest energy

One of the most famous results of the Einstein's theory of special relativity is that the mass can be converted into energy and the energy content of a rest mass m is actually

$$E = mc^2.$$

In our ordinary experience the velocity v we can deal with, even when flying on a jet, are very much smaller than c, so that $v^2/c^2 \ll 1$ and the above formula can be approximated by

$$\frac{L_0 - L}{L_0} \approx \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}, \qquad \frac{\Delta t - \Delta t_0}{\Delta t_0} \approx \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}.$$

To get an idea, for a very fast supersonic jet having a speed $v = 3600km/h = 1000m/s$ we see that the discrepancy in the measure of lengths or in time intervals is of the order

$$\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} \approx 5.5\, 10^{-11}$$

that is half of a tenth of billionth! With these numbers it is impossible for us in our daily experience, as well as for Newton and the scientists of its and later epoch, to discover the relativity of time and lengths. This explains why we have the *wrong* perception that the time is absolute. But things are different in the accelerators or for cosmic particles.
Finally, the last formula, $E = mc^2$, is at the basis of nuclear physics and, as all we know, unfortunately, of nuclear weapons. For us it will be particularly interesting for another reason, as we will now see.

1.5 Einstein's critics to Special Relativity

Even though it may appear already spectacular, Einstein was not satisfied with his theory for at least two reasons.

The first reason was that the theory privileged inertial frames. Substantially, there is no way to establish with exactness if a reference system is inertial or not, neither to prove its existence from a theoretical construction. The reason is that to check if we are in an inertial system we need to verify that, in the absence of forces, point like masses move of inertial motion. On the other way, to establish the absence of forces acting on a particle, using Newton's laws, we have to check that it moves of inertial motion in an inertial frame. Therefore, we cannot separate the concept of inertial frame and the one of absence of forces, with the effect that the *principle of inertia*, as formulated by Newton, is not at all operative. The best we can do is to *assume* we are in an inertial frame, at least at some level of approximation, and to check the consistency of our assumption. This makes difficult to consider such frames as privileged. But there is a further reason for such the difficulty. Assume we are in an inertial system in total absence of gravity. In a cabin at rest in the far space, a scientist performs his experiments for checking the inertiality of his lab. Now, let assume to switch on a uniform gravitational field, which makes each massive body to fall with the same acceleration

g. The people walking on the ground will just feel their weight but will remain inertial just like in absence of gravity. But the scientist will start precipitating with his cabin. All the tools he brought with him will fall exactly in the same way so that the scientist will see all particle persisting in their *inertial motion* if they were before. Indeed, he will not be able to verify he is not really inertial. On the opposite, doing his experiments, he will conclude that he is inertial despite it will not appear to be so to the inertial observers at rest on the ground. His inertial motions do not appear such to the original inertial system, but his ways to identify himself as inertial, by using Newton's laws, will give him a positive answer. This shows that there is no reason to privilege the original inertial system with respect to the free falling system.

The second reason making Einstein not happy with Special Relativity was related to the gravitational field. Special relativity does not admit transmission of information with a velocity larger than the limit speed. This would lead to paradoxes related to the fact that superluminal signals would allow to send information to the past. The theory of Maxwell was perfectly in agreement with the existence of a limit velocity (the speed of light in fact) and the information transmitted by an electromagnetic signal, moving at a velocity c, will arrive at destination with a late proportional to the distance traveled. The Moon main distance from the Earth is of about 360000 Km. The light employs nearly 1.2 seconds to travel it, so that the image we have of the Moon is old of about 1 second. Similarly, the Sun distance is of about 150 Millions of Km so that the light needs 500 seconds to reach us. The position of the Sun we see is old of about 8 minutes and 20 seconds. Since the Earth rotates of 360 degrees in 24h=86400s, in 500 seconds it rotates of about 2 degrees. 1 degree is essentially the angle amplitude we see the Moon instead of pointlike. Thus, when we see the Sun, its true position is more to the west, nearly about twice the apparent diameter of the Moon as seen with naked eyes. More in general, astrophysicists look at stars distant billions of lightyears and that "now" are "switched off" by a long time. The Maxwell equations take perfectly account of this, they depend on time and predict that we have to see the position of Moon, Sun or a star with the due late. But the Newton's theory of gravity did not! Its law of gravity states that the force the Sun impresses to the Earth (and vice versa) is proportional to the masses of the two bodies and to

the inverse of the square of the distance between their centres of mass. There is no time in this law: the force on the Earth does not depend on time thus, according to Newton, it doesn't depend on the position in which we see the Sun, but on its actual position "moved west of two Moons". This means that the gravitational interaction transmits instantaneously with infinite velocity. Of course this is not compatible with special relativity. For Einstein this was not acceptable at all, a new theory of gravity, allowing the existence of gravitational waves transmitting the interaction at finite velocity as light does for electromagnetic forces, needed to be developed.

1.6 Inertial mass and gravitational mass

To better appreciate the Einstein's reasoning, we need to discuss a further burden that Newton's theory has been carrying with it by a couple of centuries: *the equivalence between inertial and gravitational mass*. The inertial mass m_i of a particle appears in the Newton's law

$$m_i \vec{a} = \vec{f},$$

where i stays for inertial. If we apply a force $\vec{f}$ to a point particle then its acceleration will be smaller as m_i is larger. It is a measure of inertia, that is of the "fatigue" we need to modify the inertial motion of a particle in a given time interval. If we try to stop a bolt we will need different efforts if it is of polystyrene or of lead. The inertial mass measures the content of matter, a measure different from the volume.
According to the Newton's law of gravity [7], the attractive force also depends on the quantity of matter in the involved particles. Indeed, such law gives us a further way to measure the quantity of matter responsible for the gravitational attraction. Let us call Q_1, Q_2 the quantity of matter in two particles distant d. Then, their reciprocal attractive force will be

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{d^2}.$$

If we consider two identical particles, so that $Q_1 = Q_2 = Q$, we can measure Q by measuring F and d and then getting $Q = d\sqrt{F}$. This measure of quantity of matter may be different from both the volume

and the inertial mass. It is called the gravitational mass. But the experiments show that it is exactly equivalent to measuring the inertial mass. If in an inertial frame we fix a particle Q_1 and leave a second one, Q_2, of inertial mass m_2, free to move under the action of the first one, then it will acquire an acceleration a_2 such that

$$a_2 = \frac{Q_2}{m_2}\frac{Q_1}{d^2}.$$

Experiments show that a_2 does not depend on the particle Q_2, which implies that

$$\chi = \frac{Q_2}{m_2}$$

is a universal constant independent from the chosen particle. Once we know the value of χ, we also know Q_i any time we measure m_i. Using $Q = \chi m$ we can write for the gravitational force

$$F = \chi^2 \frac{m_1 m_2}{d^2}$$

and we get that $\chi^2 = G_N$ is the Newton's constant. In this sense, G_N is a universal constant, it has the same universal role of χ. This fact constituted a serious conceptual problem for hundreds of years: *how it may be possible that the same quantity responsible of the laziness of a particle to be accelerated is also responsible to their reciprocal acceleration when two of them are placed not too much far away each other?* It looks contradictory.

1.7 Einstein's elevator

For Einstein this paradox, more than a conclusion, represented a starting point. As characteristic in his methodology, he flips the cards on the table, abandons the preconceived assumptions, and adopts the equivalence between inertial mass and gravitational mass as a fundamental principle. Starting from this he solves all the problems.
Let us go back to the scientist in the cabin. We said that, while falling in a uniform gravitational field, nothing would convince him to be in

a non inertial frame. Because of their gravitational masses, he with his test particles will fall with the same acceleration, appearing inertial to him. Suppose now that the cabin is really at rest in an inertial frame, whereas the ground where the other observers are placed be the floor of an elevator lifting with acceleration g. What changes? Nothing, the description of the system remains exactly the same if we simply change the gravitational masses of the scientist and its test particles with the respective inertial masses. The symmetry among the situations is equivalent to the identification between inertial mass and gravitational mass. The scientist can consider himself as inertial and suppose that the outside peoples are lifting on a large elevator. On the opposite, the external observer can consider themselves as inertial, but in a gravitational field in which the scientist is falling down. Who is right? Both, since the two descriptions are perfectly equivalent if gravitational mass and inertial mass are the same thing. The only one who is wrong is poor Newton.
Therefore, there is a strict relation among gravitational fields and non inertial frames (and, as a consequence, the inertial ones). For Einstein, the uniform gravitational field is perfectly equivalent to the field of apparent forces due to the motion of a non inertial elevator. For Newton, they were just false forces, but for Einstein have the same rights as a gravitational field.
But not all gravitational fields are "perfectly" equivalent to a non inertial frame. For example, let us consider the gravitational field on the Earth. It is constant (in time) but not uniform: all forces it exerts are directed toward the center of the Earth. In this case, if the scientist perform an experiment for a long time, will see that two horizontal particles move one toward the other very slowly (in converging to the center of the Earth), while two vertical particles will move slowly apart (since the lower one is nearest to the Earth and, therefore, is subject to a slightly larger acceleration). Smaller is the cabin longer is the time interval he needs to verify this phenomenon. It is only in this exact way that inertial systems can exist from the Einstein's viewpoint: in presence of a true gravitational field, not eliminable by changing frame as in the uniform case, they exist only locally, approximately, and are defined by free falling bodies.
With this vision, for example, the Moon orbiting around the Earth is not accelerated by a gravitational force, but, instead, is just satisfying locally an inertial motion thus following the trajectory of a free motion,

the nearest motion to the to a rectilinear uniform motion. Why the trajectory is then curved? Because space is not flat but curved. This is the effect of gravity in Einstein's theory: *space and time are irreparably curved!*

Einstein thus discovers that to include gravity in his theory of relativity, he cannot use the flat Minkowski spacetime but a deformed spacetime. Its curvature represents the effect of gravity. If the spacetime is not curved, it is possible to find coordinates where the gravity completely disappears and spacetime reveals to be Minkowski spacetime. But in general this is not true and the description of our world must be expressed in terms of differential geometry, which we cannot discuss here.

1.8 Comments on non Euclidean geometry

Non Euclidean geometry arises essentially when the usual rules of geometry we are used to draw on a flat sheet of paper fail to be true. In two dimensions, this means essentially, for example, that the theorem by Pitagora does not longer applies, that through two points may pass more than two "straight" lines and so on. We can have a taste of such the geometry by thinking at the Earth surface where we live, assuming it to be a perfect sphere. What is the shortest path to move from a point of the equator, say, to the north pole? Of course, it is not a straight line! It can be shown that it is the path along the meridian from our starting point to the north pole. And to move between two points on the equator is convenient to stay on the equator. In general, between two any points on our globe it is convenient to move along the diametral circle passing through these points, as such points belong to an equator. This kind of lines are called *geodesics* and mimic the straight lines on a flat plane. Notice that if as points we take the north and the south poles, then there are infinite geodesics passing through them (all the meridians). Also, we can construct triangles (whose edges are "straight" lines) whose sum of internal angles is larger than 180 degrees: starting from the north pole, move along the 0th meridian toward the equator; then, move along the equator until meeting the 90th meridian and, then, move along the last one toward the north pole. You get an equilateral triangle with three right angles. And, of course, it cannot satisfy the Pitagora's theorem. This is the effect of deviation from Euclidean geometry in two dimensions. If we consider very small regions we will

have some difficulties to notice that the sphere is not flat. A small circle of radius r on a flat plane has area πr^2. But a small space of radius $r \ll R$ on a sphere of radius R has area $\pi r^2(1 + \frac{r^2}{4R^2} + \ldots)$, where the $\ldots$ indicate much smaller corrections. The area of the "curved" circle depends on the radius of the globe via the $1/R^2$ term. This $1/R^2$ thus measures the curvature of the sphere.

1.9 General Relativity

In a curved spacetime, very different from Minkowski spacetime, it is difficult to recognise the principle of inertia. Looking at the Moon and the Earth, which move freely along geodesics, if we try to interpret their motion on the basis of the principle of inertia then we will forced to imagine that they interact with a reciprocal force that, in a very good approximation, is comparable to the Newton's force. But they are just following (and changing) the geometry.
We learn from experience that gravitation depends on the disposition of matter in universe, which must be reflected in Einstein's theory as the fact that the geometry of spacetime must depend on how matter moves and vice versa [8] [9] [10] [11] [12]. Therefore, one expects a direct relation between geometry of spacetime and matter distribution, which interact reciprocally. Spacetime is no more just a background, but a dynamical object. In Newton's gravity the source of gravity is the mass. But we have seen that relativity shows that the mass is just a form of energy and, therefore, we expect that general relativity should be described by a relation between curvature and energy distribution. This will be the role of Einstein's equations.
Even restricting to Minkowski spacetime, we recall that Einstein's theory does not privilege any particular reference frame and, therefore, it admits frames related by totally arbitrary transformation rules. How can we keep control on physics in this possible chaos of frames? A given formula can change radically form in passing to another frame defined by very complicate transformations.
In order to give an answer, let us consider an example introduced by Einstein's in his popular exposition [13]. An observer O is at rest in an inertial frame. By hypothesis, there is no gravity there. He imposes to a second clock O' to rotate in a circular orbit in a uniform motion (t.i. with constant modulus of the velocity), by means of a thin rope. Keep-

ing fixed the number of laps per minute, longer is the rope, higher is the velocity of O'. Of course, the rope is tensioned since it is imparting a force to O'. O and O' are identical by construction, but, looking at O', O will see O' to tick slower, according to Special Relativity. Now, consider a third clock O'', placed in the same place of O, but rotating on itself in the center of a carousel, rotating in such a way that O' looks at rest with respect to it. He (we identify the clocks with the observers) can use the same clock of O to measure time (they overlap and, therefore, will agree on that clock), and looking at O'' will see the at rest clock to be slowed down, despite it is at rest. Furthermore, he will se the rope tensioned (because of centrifugal forces acting on O', would say O). We cannot apply Special Relativity to O'' since this frame is not inertial. But we can apply General Relativity: according to it, O'' will interpret the (apparent) centrifugal forces acting on O' as a (real) gravitational field and will conclude that the gravitational field slows down the flow of time. O and O'' thus will agree on the comparison of the time flowing as seen by O and by O', but not at all on the physical origin of the phenomenon of time dilation: O says it is caused by kinematical reasons, O'' says it is caused by gravity. Who is right? The new Einstein's principle states that *both are right*. Both explanations are equally correct, are equivalent since can be obtained each other by moving from a reference frame to the other one. How can we accept this? The point is that the details of the explanations are not relevant for physics itself, are necessary just for the details of the measurements we need to do physics, which, of course, depend on the reference frame (and in general they define it). The universal fact is that O' ticks slower than O (and O''), and every one will agree with this. This is the point: *the physical laws have to be written selecting which physical quantities are independent from the detailed explanation.* Convenient tools for doing it are *tensors*, mathematical objects that can be defined in an absolute way, independent from the choice of a reference frame but that assume different descriptions when specified in different frames. We say that physical laws must be written in tensorial form, so that they remain valid in any specific frame.

Notice that in the ideal experiment we have just considered, the gravitational field can be completely eliminated by choosing a suitable frame (indeed any inertial frame). Nevertheless, the result obtained by applying Einstein's relativity, that is the fact that gravity affects the flowing of

time, must remain true also in presence of not eliminable gravitational fields.

1.10 The Einstein's equations

We will not write explicitly the quite tricky Einstein's equation, but only symbolically, discussing just as much as needed to appreciate their meaning. We have seen that Einstein's theory of gravity must relate the distribution of energy and the way it varies in space and time, to the curvature of spacetime. Indeed, Einstein's equations compare two tensors, one describing geometry and the other the mass distribution.

Einstein's tensor

Gravity is described by a geometric tensor $\boldsymbol{G}$, called the *Einstein's tensor*. It measures in a very precise way the spacetime curvature. It has the dimension of the inverse of the square of a length, like we have seen for the two dimensional sphere, compatibly with the fact that curvature is as larger as smaller is the length scale at which deviation from flatness becomes sensible. Despite this, $\boldsymbol{G} = 0$ does not mean that spacetime is flat. This condition describes the gravitational field in vacuum: a residual curvature survives and it is of fundamental importance since, as we will see, is responsible of the transmission of information between different regions containing matter. If we imagine spacetime as a sort of a stretched rubber tarpaulin deformed by more or less weighty balls, the vacuum Einstein's equations describe the deformations in points not touching the balls.

Energy-momentum tensor

The distribution of energy is described by a tensor $\boldsymbol{T}$, called the *energy-momentum tensor*, which has the dimension of an energy per unit volume, an energy density. The fact is that in general one cannot assign energy to a point. If we take an apple (just to evocate Newton) we may know its total energy or the energy in a piece or in smaller and smaller pieces having very tiny volumes. When such volumes go to zero, the corresponding energy also goes to zero, and what can remain finite is the ratio between the energy and the volume it is contained in. Therefore,

energy-momentum tensor says us how much energy is contained in any region as small as we want, and how it changes in space and in time.

Einstein's equations

The Einstein's equations have the tensorial form

$$\boldsymbol{G} = \kappa \boldsymbol{T},$$

where κ is a constant having suitable unit of measure in such a way that, like the l.h.s., also the r.h.s. has the dimensions of the inverse of the square of a length. Indeed, Einstein proved that at low energy densities and at velocities much smaller than c, his equations reproduce to Newton's gravity if

$$\kappa = 8\pi \frac{G_N}{c^4}.$$

Recall that in standard units the speed of light is $c = 299792458 m/s$ and the Newton's constant is $G_N = 6.67 \cdot 10^{-11} J \cdot m/Kg^2$, so that the Einstein's constant is $\kappa \approx 2 \cdot 10^{-43} m/J$. This is a very small number: 2 divided by ten 43 times! This means that are necessary enormous energy densities to get appreciable deformations of spacetime. Otherwise, we must look at very large regions to be able to appreciate effects of curvature. This is like to say that spacetime is an extremely rigid medium, very hard to deform. This is why gravity is so weak.
Before passing to the main object of our interest, there is an important point regarding Einstein's equation, which deserves to be mentioned. These equations contain also the equations of motion for matter, since they impose the conservation of energy and all the conserved quantities related to motion, in a way that is compatible with the equations describing the evolution of the possible other fields (electromagnetic, nuclear, ...). Therefore, Einstein's equations have to be imposed together with the equations of all other present fields, the corresponding initial condition, including for matter whenever it is not microscopically described in term of fields. In most cases, indeed, matter is described macroscopically by thermodynamical quantities, like energy density ρ, pressure p and temperature T. These are not independent in

general, but related by equations not deducible from Einstein's equations, and which characterise matter in an independent way, so that they must be imposed separately from all other equations. These relations, thus independent from the equations of motion, are called *state equations*, and, typically, have the form $f(\rho, p, T) = 0$. In several situations the temperature is irrelevant, so that the state equation takes the form $p = g(\rho)$, t.i. the pressure is a function of the energy density only. We will see later the relevance of the state equation for our aims.

2. Gravitational waves

We are now ready to discuss the main topic of this short communication.

2.1 Prediction of gravitational waves

One of the most important predictions of Einstein's equations is the existence of gravitational waves. Let us go back to the example of the interaction between the Sun and the Earth. They are moving one around the other just because are following the geometry of spacetime, which indeed depends on their motion. What Einstein's equations predict is that the deformation of the geometry around the Earth, due to the relative motion of the Sun, does not happens instantaneously, according to the displacement of the Sun, but it propagates with finite velocity from the Sun to the Earth. It is something like what happens in a lake when we try to move a floating cork stopper by shacking the water with a hand: the stopper will start moving only when the waves we generate will reach it. In the same way, the Sun, moving "inertially", shacks the space around it and this shaking will be transmitted to the Earth (and vice versa) by waves. These are the gravitational waves. And the Einstein's equations predict that they move with velocity c, that is the speed of light. The propagation of these spacetime deformations in vacuum is governed by the equation $\boldsymbol{G} = 0$. These equations thus say us how the information on what is happening around the Sun (or everything is generating the waves) are diffused all around in vacuum. Since their speed is exactly the same as for the light in vacuum, when we look at a beautiful sunset we are not only looking at the position of the Sun eight minutes and twenty seconds ago, but we are also feeling its gravi-

tational attraction as exerted by it from that position eight minutes and twenty seconds ago.
This way, Einstein solved all his worries about gravitation and relativity. He predicted the existence of the gravitational waves in 1918 with his paper *Über Gravitationswellen* [14], with a bitter taste to have made an intellectual discovery that never would have the possibility to be detected experimentally due to the incredibly small value of the constant k. We recall that $\kappa \approx 2 \cdot 10^{-43} m/J$. In the mentioned paper, Einstein computed the evolution of the gravitational waves showing their extreme weakness and the impossibility to measure their effects on matter. However, there were two issues that were unimaginable at that time and that Einstein did not consider: the existence in the cosmos of astral monsters, like black holes and neutron stars, and the very rapid and impressive technological evolution in the short lapse of time of less than a century.

2.2 Monsters and ogres

The usual matter we find around is essentially empty. It is made by atoms, whose diameter is of the order of 10^{-8}cm, 10 billionths of centimetre. It is composed by a nucleus surrounded by minuscule electrons. The nucleus contains most of the mass, the electrons weighting less than 1/1000 of it. The diameter of the nucleus being nearly 10 millionths than the one of the atom, so we see that matter is concentrated in a very small region. If nuclei were large as an orange the atoms would have a diameter of few kilometres and we would see a lot of empty space among nuclei. Therefore, the density of matter is much lower than it could be if electromagnetic field (and not only it) was absent.

Now, let us look at a star. It is an enormous mass of gas, mainly Helium and Hydrogen, collapsing on itself because of gravity and its huge mass. When the gas is sufficiently condensed, the molecules start hitting each other with higher frequency and violence, increasing the thermal agitation. At a given point, when the scattering energy is sufficiently high, nuclei and electrons begin separating. Because of the very high density, due to the gravitational collapse, despite the electric repulsion, the protons of Hydrogen begin to interact directly, giving rise to a new physical phenomenon: the *nuclear fusion*! The nuclei of Hydrogen, also interacting with electrons, fuse together generating Helium

and so producing a lot of energy. The star is switched on. The energy generated by fusion is so high that the scatterings among the nuclei are able to stop the gravitational collapse. At least until there is Hydrogen to burn. When almost all Hydrogen is burned out the star will start collapsing again. But, then, it is the Helium that starts a fusion process producing heavier nuclei, like Boron and Lithium, and so on. However, at a certain point this process will stop, since it is not possible to generate heavier and heavier nuclei always producing energy. Starting from Iron and heavier nuclei, fusion becomes endothermic, this meaning that we have to add energy in order to generate fusion. Thus, when there is nothing left to burn the collapse will proceed. However, not indefinitely. Quantum physics now enters the game: the Pauli's exclusion principle [15] [16], the same that forbids two electrons to overlap, will contrast the gravitational effect with an increasing pressure, which, if the total mass of the star is not too much, will stop the whole process. The star will then find a definitive equilibrium, it has been became a white dwarf. "Not too much large mass" means of the order of the mass of the Sun. More precisely, the Pauli's pressure can stop the collapse of the star for masses no larger than $1.4 M_\odot$, where $M_\odot \sim 2 \cdot 10^{30}$kg is the mass of the Sun. This is known as the Chandrasekhar limit [17] [18] [19].
Things change for stars heavier than the Chandrasekhar limit. Pauli's pressure among electrons (and also among protons) does not suffice to stop the collapse, which continues. Electrons are pushed down inside protons by the enormous pressure, transforming them in neutrons and generating neutrini. Almost all matter becomes made of neutrons, which are fermions and, again, satisfy the Pauli's exclusion principle. The neutrons are now compressed in a much smaller space than in the case of a white dwarf, essentially are "overlapping" each other. The Pauli's pressure due to neutrons is thus much larger than the one due to electrons and, if the mass is not too large, it can stop the collapse. In this case the star becomes a *neutron star*, a monster looking as a giant nucleus made of neutrons. We can have an idea of its density: since we have seen that the diameter of a nucleus is 100000 times smaller than the diameters of a an atom, in the volume of an atom there can belong $100000^3 = 10^{15}$ nuclei. This means that the mean density of a neutron star is expected to be 10^{15} larger than the density of water, $\rho \sim 10^{15} g/cm^3$, 1 billion of tons per cube centimetre! For exam-

ple, the Earth has a mean density of $5.5g/cm^3$ for a diameter of nearly $12700km$. In order to get the same density of a neutron star we would need to compress the Earth until reducing it to a diameter of less than $300m$.
But, again, we have said that this is the final stage of a collapsing star if the mass is not too large. But what exactly too much large means is not yet known. The new limit value depends on the state equation of the "nuclear matter" constituting the star, which is not known since both theory and experiments are lacking for so high density matter. Observations suggest that the limit mass should be of the order of $2M_\odot$, two solar masses. For higher masses, even the Pauli's pressure of neutrons becomes insufficient to contrast gravity and, plausibly, no physical process is able to stop the collapse. Therefore, the mass shrinks down below a size determined by a critical radius, known as the *Schwarzschild radius*

$$r_S = 2\frac{G_N}{c^2}M,$$

where M is the collapsing mass. When this happens the stars becomes a new monster, a *black hole*. A black hole is one of the most strange objects living in our universe. It is a sort of an ogre, defined by a spherical shield of radius r_S, which can be crossed only in one direction, from outside inward. This way, a black hole devours everything it meets on the road increasing its radius proportionally to the mass. Using the above formulas, the values of G_N and c and recalling that the mass of the Earth is around $5.9\ 10^{24}$kg, we see that if we were able to compress the Earth until he becomes a black hole, its radius would become of about 9mm, roughly like a cherry! Since nothing can escape the horizon of a black hole[1] these ogres are essentially more elementary and simpler to be described than neutron stars. We will explain what it means when discussing the experimental results.

[1]At least at classical level. Hawking has shown that, when quantum effects are included, black holes are expected to loose mass emitting a thermal radiation, the *Hawking radiation*. However, for black holes of large masses this effect is very weak and always negligible.

2.3 Measuring gravitational waves

Gravitational waves propagate with velocity c, carrying an energy that deforms time and space in the plane transversal to the direction of propagation.

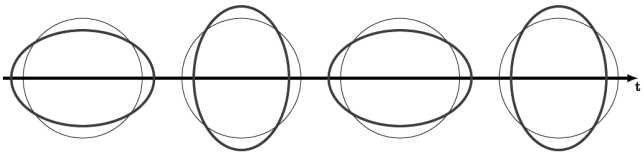


Fig. 2 – A gravitational wave is moving in the direction orthogonal to the plane of a circle. The circle appears to be deformed in different ways at different times.

Very far from the source, where we are, a gravitational wave can be seen as the superposition of plane waves, each one oscillating with given frequency. They deform space in such a way that, when it is contracted in a given direction, it is expanded in the orthogonal direction on the deformation plane.
In order to understand better what is happening, let us suppose to have two free masses at rest in a given inertial frame, in absence of gravity, that is in a flat spacetime. Suppose they are placed on the x axes at the positions $x_1 = -L/2$ and $x_2 = L/2$. At a certain point, they are hit by a gravitational wave moving in the z direction. Spacetime will be deformed but how can we detect it? A way is to consider a laser beam which is shot, say, from particle 1 to particle 2, with a given wavelength λ. We can measure the distance between the two masses by counting the wavelengths between x_1 and x_2. In a flat space it will be $n = L/\lambda$, not necessarily an integer number, of course. Equivalently, we can measure the distance by measuring the time light employs to travel from x_1 to x_2: $\Delta t = L/c$. But when the gravitational wave is passing, spacetime is deformed, the running of time changes and, in general, the notion of inertial frame is lost so that we have not a natural choice of frame where performing measurements. We know that the result of a measure may depend on the choice of a frame, therefore, according to Einstein, we need to look for information that will be independent from the choice of a specific frame. Now, we know that in presence of a

gravitational field one can define local inertial observers. Let us consider such observers placed along the laser beam: they are exactly the observers each one seeing the light of the laser traveling with velocity c and wavelength λ. Different observers would not be generically inertial and would measure different values for λ and for the speed of light. All together, these observers define a frame (not globally inertial!) in which it makes sense to define the distance between the two masses as the time $\Delta t'$ employed by light in moving from the first particle to the second one, or, equivalently, the number n' of consecutive wavelengths of the laser between the two points. This is called *the proper distance* between the two masses. It is clear that, the number of wavelengths is independent on the way we measure it (whereas the traveling time and the measure of λ may change with the reference frame) and it is thus a very convenient way to measure the proper distance. The effect of the transit of a gravitational wave is indeed to modify the proper distance between two free masses by a small amount proportional to the intensity of the wave, usually called *the strain* $h(t)$ of the wave: $\Delta t \to \Delta t' = \Delta t + \delta t$ or, equivalently, $n \to n' = n + \delta n$. δn is determined by δt which, if the distance between the masses is much smaller than the wavelength of the gravitational wave, results to be proportional to $h(t)$. Thus, a measure of δn provides a measure of δt and, then, a measure of the strain $h(t)$.

The reason why the distance L between the free masses must be much smaller than the wavelength ℓ of the gravitational wave, is that this way the flying time of the laser beam, L/c, is sufficiently short so that h is substantially constant and δt depends only on $h(t)$. Indeed, $h(t)$ changes considerably in time intervals in which the gravitational wave travels a displacement of the order ℓ. Since also gravity propagates with velocity c, we get the above condition. If this condition is not satisfied, the total effect on the proper distance will not be proportional to $h(t)$ but to its average over an interval of time L/c. This makes less immediate to have information on the instantaneous value $h(t)$. Nevertheless, as we will see, it is necessary to consider large proper distances, otherwise the effect of the strain, $\delta L \propto hL$, will be too small to be detectable.

Another important observation is what a rigid body is. A rigid body is something made of particles, say, strongly glued each other, by electromagnetic forces. These are non-gravitational forces that, therefore, will react to deformations of spacetime by accelerating particles with re-

spect to the (local) inertial frames. So, a body is rigid if its proper length is not affectd by a deformation of spacetime, thanks to the effect of the non gravitational forces that hold it together. So, if in place of two free masses we consider two masses hold together by a rigid structure, then, their reciprocal proper distance will not be affected by the transit of a gravitational wave.
This are the principles based on which one can design an *interferometric gravitational antenna*. The idea is to adapt the Michelson and Morley interferometer, constructed inside a rigid structure, allowing a part of one of the two arms to be inertially free so that its proper length will be modified by the transit of a gravitational wave. This can be realised by inserting two pendulums along one of the arms, as depicted in the figure below. They are free to oscillate horizontally so that their proper distance is sensible to spacetime deformations.
The pendulum P_1 is completely transparent, while P_2 is a perfect mirror. In absence of gravitational waves the system is settled in such a way to have in F a disruptive interference so that the screen will appear completely black. This means that the path of light along the two arms of the interferometer are such that the split beams meet again in D, and then in F, with opposite phases.

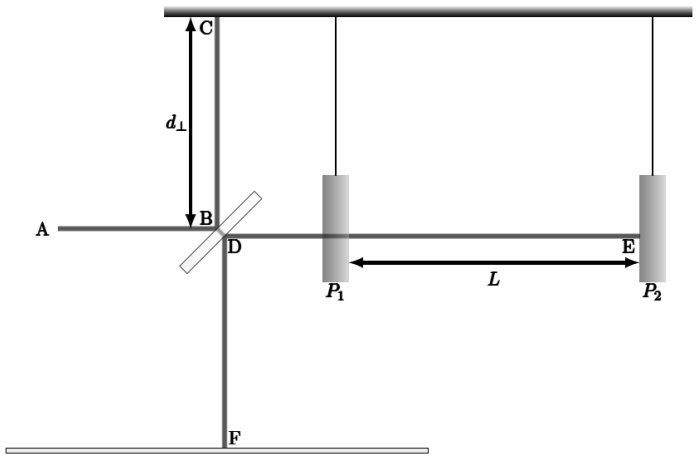


Fig. 3 – Gravitational waves detector.

When a gravitational wave passes in the region of the antenna, the whole structure, being rigid, will not change its proper extensions except L, which will change with the proper length, hopefully, accordingly to Einstein's predictions. This implies a modification of the length of the corresponding arm, which, even though very small, will no more allow the two beams to meet in D exactly with opposite phases and, therefore, they will not cancel anymore thus projecting on the screen a visible interference picture. This picture and its intensity depends on the δn generated by the deformation, so we get a measure of δt and, thus, of h.

2.4 LIGOs and VIRGO

There are three interferometric gravitational antennas in the LIGOs VIRGO collaboration: two LIGOs [20] [21] (Laser Interferometric Gravitational-Wave Observatory) in the USA, and Virgo [22] in Italy. One of the two labs of LIGO is placed in Hanford Site, in place of an ex nuclear implant, in the state of Washington, near the town of Richland. The other one is in Livingston, Louisiana. They are separated by a distance of 3000km, corresponding to about 10ms light, since 10 milliseconds is nearly the time light needs to travel through 3000 kilometres. Moreover, they are equipped each one with a gravitational wave interferometer having an arm of length $L \approx 4km$ (between the pendulums). In order to amplify the signal, the laser beam is reflected 280 times between the two pendulums before being redirected to the interference point (the point D in the picture). This way the arm has an effective length of 1120 kilometres.
They are designed to reveal gravitational waves in a range of frequencies ν between 30 and 300Hz. Since the wavelength λ is related to the frequency ν by the relation

$$\lambda = \frac{c}{\nu},$$

we see that it varies in the range $1000 - 10000km$. Therefore, the effective length of the arm is not much smaller than λ and accurate formulas, avoiding the oversimplifications we discussed above, are needed in order to correctly estimate the strain $h(t)$. Moreover, they are expected to reveal signals of the order 10^{-21}, which means that the proper distance L

between the pendulums will vary by a displacement

$$\delta L \approx hL \approx 4 \cdot 10^{-21} km = 4 \cdot 10^{-16} cm,$$

which is approximately one 200th the diameter of a proton! The pendulums have masses of about $40kg$. Probably a sneeze would generate a displacement of them larger than several atoms. Thus, we understand how much accuracy must be considered in order to protect the antenna from other causes of oscillations: seismic movements, fluctuations of humidity, temperature and density of air and its flow, noise due to the passage of vehicles or the walking of scientists near the antenna, variation of the temperature of the components of the antenna (generating dilatations an deformations), thermal, statistical and quantum fluctuations of the characteristic of the laser beam, and so on.
Each of these phenomena can generate very small displacements that, despite their smallness, can be larger than fractions of a proton diameter. One has then to be sure to eliminate or make them clearly distinguishable from the gravitational effects in order to have an efficient antenna. There is no place here to discuss how, indeed, all this problems are solved, but this shows us the enormous difficulties one must tackle in order to reveal gravitational waves even when the latter are generated by catastrophic events. And we can understand the incredulity on the part of Einstein for experimentalists to be able to detect such a weak phenomenon.
There is a third antenna, Virgo, sited in Cascina, near Pisa, in Italy, built in an Italian-French collaboration. Its interferometer has an arm of $3km$ with 30 reflections, for an effective length of about $90km$. The corresponding amplification of the signal is much smaller than the one of the LIGO interferometers. In the advanced evolution the effective length will be enlarged to nearly $800km$. The importance to have a third antenna is to be able to triangulate the position of the source of the signal.

2.5 The observations

Up to the date of the present communication, March 1, 2018, there have been detected six events, named GW150914 [23], GW151226 [24], GW170104 [25], GW170608 [26], GW170814 [27], GW170817 [28]. GW stays for gravitational wave and the numbers are the date of the

event, GWaammdd. The first five events have been identified as generated by the coalescence of two black holes, while the last one as corresponding to the coalescence of two neutron stars. We will discuss the first and the last detections.

GW150914

In September 14, 2015, Virgo was not yet active and the LIGO labs detected a signal corresponding to a displacement of the pendulums of about one 200th of a proton diameter, with a starting frequency of about $35Hz$ increasing fast up to $250Hz$. The whole signal had a duration of about one 5th of second, ending up in a quick ring down. Comparison with theoretical prediction allowed the scientists to understand that this signal has been generated by the interaction between two black holes, having masses $M_1 \approx 36M_\odot$ and $M_2 \approx 29M_\odot$, where $M_\odot \approx 2 \cdot 10^{30}kg$ is the mass of the Sun. Like the Moon and the Earth, they started rotating one around the other with increasing velocity while emitting gravitational waves of increasing frequency (the frequency of the waves is twice the frequency of rotation of the black holes). This way, they gradually lost energy thus decreasing their reciprocal distance and increasing the rotation energy. The corresponding increasing of the frequency of the emitted gravitational waves is said the *chirp* and depends in a very precise way from the masses of the orbiting bodies. This process happened faster and faster, until the two black holes touched devouring each other and reducing to a final stationary black hole. This final phase corresponds to the ring down. The mass of the final black hole results to be about $M \approx 62M_\odot$. There is a loss $\Delta M = M_1 + M_2 - M \approx 3M_\odot$: three solar masses has been transformed in pure energy, mainly distribute in gravitational waves! This means that the emitted energy is about

$$\Delta E = \Delta M c^2 = 5.4 \cdot 10^{47} J.$$

It is an incredible amount of energy. If 7billions of people would have at disposition 300kw of electric power (100 times the power we have at disposition in Italy) and each of them used the full power uninterruptedly night and day, the energy ΔE would be consumed in $8 \cdot 10^{24}y$, which means 8 millions of billions of billion of years, nearly 600000

billions times the age of the universe! This amazing energy has been exploded in all directions in a fraction of seconds.
Why it did not ravaged us? Because it happened at a huge distance, $D \approx 410 Mpc$, where Mpc stays for megaparsec, 1 million of parsec. One parsec consists in 3.26 light years (ly) and 1ly corresponds nearly to 9500 billions of km. Therefore, $D \approx 12.7 \cdot 10^{24} m$. When reaching the Earth, the energy ΔE is distributed on a sphere of radius D and area $A = 4\pi D^2$. Of this, only the portion of area πR^2 hits the Earth, if $R \approx 6366 km$ is the radius of the Earth. It is thus a energy of about

$$\varepsilon = \frac{R^2}{4D^2} \Delta E \approx 34 kJ,$$

of which only a small fraction (less than 1/10000 of Joule) hits the regions covered by the antennas, leading to a deformation of about a fraction 10^{-21}. This is exactly what has been measured by the antennas, in perfect agreement with the predictions of Einstein's theory. Before discussing the meaning of these results, let us describe the other case.

GW170817

In August 17, 2017, it has been detected the sixth event, but the first case of gravitational waves generated not by the coalescence of two black holes, but of two neutron stars. This time also Virgo was active, even if not yet sensitive enough to resolve the signal, this has been sufficient for the triangulation of the position of the source. The observed signal has qualitatively the same form as for the previous cases, but with different qualitative details. Indeed, it corresponded to the merging of masses below $2M_\odot$, thus compatible with neutron star masses. The frequency of the signal again raised from 40 to 300Hz, then suddenly disappearing in a ring down. The process taken nearly 30 seconds. This collapse of neutron stars, merging probably in a final black hole, happened at 40Mpc, nearly one tenth the distance of GW150914. The energy emitted has been lower than the previous case, but it is estimated to be larger than $\frac{1}{40} M_\odot c^2$, say of the order 1/100 the one in GW150914. Why then this event is even more exciting than the previous five ones? Because, as we said, it corresponds to the merging of neutron stars in place of black holes. Despite their large masses, black holes are essentially Einstein vacuum solutions, and, since they devour everything, even when

fusing one into the other, nothing can essentially escape but the gravitational waves they generate.
For neutron stars, the story is quite different, since they are made of matter and this influences the whole process in several ways. First, before they touch each other, the evolution depends also on how matter reacts to the stress of gravity. Indeed, especially in the last moments of their "dance", when they are very near before touching, they will exert enormous tidal forces, similarly like the Moon does with the Earth, but with an incredible strength. How matter supports such a stress depends on the state equation describing high density nuclear matter. As we already said, such an equation is not yet known at a theoretical level, and cannot determined experimentally since such huge nuclear densities cannot be realised in any laboratory. Moreover, when the stars touch, a tremendous bump ejects a lot of neutronic matter everywhere around. The direct interaction of matter also generates electromagnetic waves and neutrinos. For example, the expelled neutronic matter will appear initially in form of nuclei containing an excess of neutrons. When no more constrained by gravity, neutron are no more stable particles and tend to decay in protons, emitting an electron and an antineutrino. When a suitable number of neutrons are transformed, that is when they become stable nuclei, typically gold and similar nuclei, this process stops. In any case, it means that beyond gravitational waves, one also will reveal electromagnetic signals, neutrini, and, therefore, a lot of different information. For this reason, events of this kind are called *multi-messengers*.

2.6 Conclusions and new perspectives for Physics

GW150914 has been the first direct revelation of gravitational waves, but it has not been the first proof of their existence. In 1974, Russell Alan Hulse and Joseph Hooton Taylor Jr. observed the orbit of a pulsar around a neutron star [29]. General relativity predicts that two stars orbiting one around the other emit gravitational waves, thus loosing energy and, then, changing their period. This variation of the period can be computed with high precision, but it is very difficult to be measured on usual stars because the weakness of the effect. The lost of gravitational energy is higher for a pair of neutron stars, but tracing the orbit of a neutron star is quite difficult since their brightness is very weak. But a pulsar is a neutron star that is rotating very fast around its own

axis (with "days" of the order of few milliseconds) so that, carrying a magnetic field, they generate X-ray pulses with a well defined frequencies and that can be observed from the Earth. If the pulsar is orbiting around a black hole or another neutron star, then the pulse is modulated by the orbital motion. This allows to measure the period of the orbit with high precision. Hulse and Taylor used exactly this mechanism to compare the variation of the period per year with what predicted by Einstein's equations because of gravitational waves emission. They found a perfect agreement, this way obtaining an indirect proof of the existence of gravitational waves. And for this they won the Nobel prize. However, it has not been (and it is not) possible to detect on Earth such waves because are too weak.

However, GW150914 is not only this: it represents also the first direct confirmation of the existence of black holes of the dimensions described above. Notice that the Schwarzschild radii of the two black holes involved in the bump are of the order of 100km. Recall that nothing can escape from the black hole, not even light. Therefore, we cannot see black holes, usually we can see their effects on the matter around them. This means that we will see nothing if the black holes are not surrounded by matter. But *gravitational waves allow us to see them!* Indeed, it is exactly what happened at LIGO labs. The form of the measured signal gives information both on the masses and the period and one can then follow the change of the orbit radius until they touch (recall that the third Kepler law shows how the radius of the orbit changes with the period). Therefore, looking at the signal we can see how much the distance between the two bodies can decrease before they touch. If such the distance is smaller than the sum of their Schwarzschild radii, they cannot be nothing else than two black holes.

A third thing is that this kind of events provides new tests for general relativity. Indeed, it is not a priori guaranteed that Einstein's equations must remain true at strong gravities, like in regions where such ogres and cannibal monster are present. But up to now none of the observed events has required modifications of the Einstein's equations in order to get an explanation. Thus we can consider them as proves of the robustness of general relativity.

This is true also for GW170817. For example, in this case it happened that the light generated by the terrible bump between the neutron stars reached us 1.7 seconds later, proving that gravitational waves and light

move at the same speed, as predicted by general relativity. Notice that we are speaking about 1.7s compared to a distance of about 100 millions of light years. Moreover, we have to notice that gravity interacts very weakly so that it travel through cosmological distances almost without being deformed by the matter it meets along the path. This can account the small delay of light.

But there is further information we can infer from the multi-messenger. We said that in the final stage of the dance of the stars, the exact evolution and the final collapse will depend on the relative tidal forces and on the equation of state governing neutronic matter at incredibly high density and low temperature. Notice that the temperature of a cooled neutron star is of about $10^{10}K$, that is 10 billions of Kelvin degrees. This is nearly one thousand times the temperature at the center of the Sun. But for a for a neutron star it must be considered essentially as to be zero temperature for the following quantum mechanical reason. Neutrons (and quarks), constituting the neutron star, are fermions, which mean that they have to satisfy the Pauli's exclusion principle. As such, they cannot all fall into the minimal energy state after it has been already saturated by other fermions. Therefore, compatibly with that principle, they can just occupy not the lowest energy state but the lower energy allowed. At the end they will occupy all the states up to a maximal energy, called the Fermi's energy. This happens truly at zero temperature, or, more practically, at temperatures T such that kT, where k is the Boltzmann constant, is much smaller than the Fermi's energy. The Fermi's energy depends on the density of neutronic matter and on the equation of state. The latter is not known in our case, but a rough estimation can be made equally, ensuring that the Fermi's energy for a neutron star, with its enormous density, is much larger than kT for T of the order of ten billion of Kelvin degrees. Since there is no possibility to reproduce these conditions in a laboratory, we have not direct information on the equation of state of dense cold matter. But we can hope to infer new information on it by reading the details of the final stage of the merging as shown by the gravitational wave signal, as well as the from the electromagnetic signals. This way, looking at far and giant multi-messengers we can get information on very high energy nuclear physics.

In conclusion, measuring gravitational waves opens a new exciting era. It gives us new eyes to look both at the deep and far universe as well as the microscopic world of nuclear physics.

REFERENCES

[1] A. Einstein, Zur Elektrodynamik Bewegter Körper, *Annalen der Physik* 1905:17: 891–921;

[2] H.Minkowski, Raum und Zeit, 80. Versammlung Deutscher Naturforscher, Köln, 1908. Published in *Physikalische Zeitschrift* 1909:10:104–111, and in *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 1909:18:75–88 (1909);

[3] A. A. Michelson, The Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether, *American Journal of Science* 1881: 22: 120–129;

[4] A. A. Michelson, Relative Motion of Earth and Aether, *Philosophical Magazine* 1904: 8: 716–719;

[5] A. A. Michelson, E. W. Morley, Influence of Motion of the Medium on the Velocity of Light, *American Journal of Science* 1886: 31: 377–386;

[6] A. A. Michelson, E. W. Morley, On the Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether, *American Journal of Science* 1887: 34: 333–345;

[7] I. Newton, Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, *J. Societatis Regiae ac Typis J. Streater*, London, 1687;

[8] A. Einstein, Zur allgemeinen Relativitätstheorie, Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften (Berlin). Sitzungsberichte 1915: 778–786;

[9] A. Einstein, Zur allgemeinen Relativitätstheorie (Nachtrag), *Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften (Berlin).* Sitzungsberichte 1915: 799–801;

[10] A. Einstein, Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie, *Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften (Berlin).* Sitzungsberichte 1915: 831–839;

[11] A. Einstein, Die Feldgleichungen der Gravitation, *Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften (Berlin).* Sitzungsberichte 1915: 844–847;

[12] A. Einstein, Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, *Annalen der Physik* 1916: 49: 769–822;

[13] A. Einstein, Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie (gemeinverständlich), *Braunschweig*, Vieweg, 1917; A. Einstein, Relativity: The Special and the General Theory: Popular Exposition, traduzione di Robert W. Lawson, *Methuen & Co. Ltd*, Londra, 1920; A. Einstein, Relatività. Esposizione divulgativa, *Bollati Boringhieri*, Torino, 2011;

[14] A. Einstein, Über Gravitationswellen, *Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften (Berlin).* Sitzungsberichte (1918): 154–167;

[15] W. Pauli, Über den Zusammenhang des Abschlusses der Elektronengruppen im Atom mit der Komplexstruktur der Spektren, *Zeitschrift für Physik*, 1925: 31: 765–783;

[16] W. Pauli, The connection between spin and statistics, *Phys. Rev.* 1940: 58: 716–722;

[17] S. Chandrasekhar, The density of White Dwarf Stars, *Philosophical Magazine*, 1931: 11: 592–596;

[18] S. Chandrasekhar, The Maximum Mass of Ideal White Dwarfs, *Astrophysical Journal*, 1931: 74: 81–82;

[19] L. D. Landau, On the theory of stars, *Phys. Z. Sowjet.*, 1932: 1: 285;

[20] B. P. Abbott et al., LIGO: the Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory, *Rep. Prog. Phys.* 2009: 72: 076901;

[21] The LIGO Scientific Collaboration. Advanced LIGO, *Class. Quantum Grav.* 2015: 32: 074001;

[22] T. Accadia et al., Virgo: a laser interferometer to detect gravitational waves, *JINST*, 2012: 7: P03012;

[23] B. P. Abbott et al. (LIGO Scientific and Virgo Collaborations), Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger, *Phys. Rev. Lett.* 2016: 116: 061102;

[24] B. P. Abbott et al. [LIGO Scientific and Virgo Collaborations], GW151226: Observation of Gravitational Waves from a 22-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence, *Phys. Rev. Lett.* 2016: 116, no.24: 241103;

[25] Virgo and LIGO Scientific collaborations, B.P. Abbott et al., GW170104: Observation of a 50-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence at Redshift 0.2, *Phys. Rev. Lett.* 2017: 118: 221101;

[26] BP Abbott, et al., GW170608: Observation of a 19-solar-mass binary black hole coalescence, *The Astrophysical Journal Letters*, 2017: 851. vol. 2: L35;

[27] B. P. Abbott et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration), GW170814: A Three-Detector Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Coalescence, *Phys. Rev. Lett.* 2017: 119: 141101;

[28] B. P. Abbott et al., GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral, *PRL* 2017: 119: 161101;

[29] R. A. Hulse and J. H. Taylor, Discovery of a pulsar in a binary system, *Astrophys. J.* 1975: 195: L51.

MATERIALI CON BAGNABILITÀ CONTROLLATA. UN'ISPIRAZIONE DALLA NATURA

SILVIA ARDIZZONE (*) e DANIELA MERONI (*)

Nota presentata dal m.e. S. Maiorana
(Adunanza del 22 marzo 2018)

SUNTO. – Lo studio della "bagnabilità" di superfici solide da parte di liquidi è un campo affascinante e in continua evoluzione. In funzione della natura delle interazioni che si verificano al contatto solido/liquido, il liquido potrà ricoprire tutta la superficie con un film sottile (come nel caso di acqua su una superficie idrofila) o rimanere raccolto in gocce (come ad esempio per le gocce di acqua su una superficie polimerica). Nel primo caso prevalgono le forze adesive, nel secondo caso quelle coesive. I materiali di origine naturale mostrano caratteristiche di bagnabilità controllate ed, in alcuni casi, estreme: ad esempio, alcuni tipi di foglie e insetti sono superidrorepellenti. Traendo spunto da ciò che la natura crea in modo esemplare, questi effetti possono essere riprodotti sperimentalmente in laboratorio, al fine di modulare le caratteristiche di bagnabilità in funzione dello specifico interesse applicativo. I risvolti applicativi di questi aspetti sono numerosissimi e vanno dai biomateriali ai tessuti antimacchia, da sistemi antiappannamento a sistemi per la protezione del patrimonio culturale.

***

ABSTRACT. – The wettability of solid surfaces is the result of the balance between adhesive and cohesive forces. When adhesive forces at the solid/liquid interface prevail over the cohesive forces in the liquid, the drops will spread over the solid leading to a good wetting as in the case of water over an hydrophilic surface. When instead the adhesive forces are weak, the liquid will not wet the surface remaining in droplets, as water on a polymer. Natural materials exhibit tailored wetting behavior: for instance, certain leaves and insects present superhydrophobic properties. By mimicking what nature creates in an exemplary way, the wetting properties of systems can be tailored experimentally to obtain materials with great applicative impact. The possible applications of such phe-

(*) Università di Milano, Dipartimento di Chimica, Milano, Italy.
E-mail: silvia.ardizzone@unimi.it

nomena are very numerous and span from biomaterials to antistain materials, from antifog surfaces to systems for the protection of cultural heritage.

1. Introduzione

La bagnabilità di una superficie solida da parte di un liquido è il risultato del bilancio tra le forze di adesione al contatto solido/liquido e le forze di coesione operanti nel liquido. Quando un liquido bagna una superficie solida prevalgono le componenti adesive ed il liquido si spande sul solido in modo da estendere la superficie di contatto: la superficie solida viene ricoperta da un film liquido, come nel caso di acqua su una superficie idrofila. Al contrario se le interazioni al contatto solido/liquido non sono tali da far prevalere la componente adesiva il liquido rimane raccolto in gocce riducendo al meglio l'estensione del contatto interfasale.

La possibilità di controllare le caratteristiche di bagnabilità di una superficie ha innumerevoli risvolti applicativi che vanno dalla protezione dei beni culturali lapidei, allo sviluppo di materiali smart autopulenti, antimacchia, antiappannamento o alla creazione di coatings protettivi contro la corrosione o il fouling nautico. I biomateriali offrono numerosi esempi di come il controllo delle caratteristiche di idrofilicità/idrofobicità possa determinare il successo della procedura adottata. L'adesione batterica e la sua proliferazione su una superficie dipende da molti fattori quali, la carica e la morfologia della superficie, il pH, la forza ionica ma primariamente dalle caratteristiche di bagnabilità del materiale adottato.[1,2] Superfici idrofile tendono a sfavorire l'adesione e la crescita batterica anche a seguito della presenza di strati strutturati di acqua chemi- e fisisorbita che contrastano il contatto diretto tra i batteri e la superficie. D'altra parte, in situazioni cliniche diverse è opportuno prevenire fenomeni di adesione di proteine e cellule, come nel caso, ad esempio, di stent vascolari o barriere peritoneali; la superficie del materiale deve presentare, in questo caso, caratteristiche di elevata idrofobicità e bassissima adesione.[3,4]

2. Angolo di contatto

La bagnabilità di un solido viene definita sulla base del valore dell'*angolo di contatto*, θ, cioè l'angolo descritto dalla superficie del solido e dalla linea tangente al profilo della goccia nel punto di contatto con

la superficie. Il valore dell'angolo di contatto è il risultato del bilancio delle tre tensioni superficiali che agiscono sulla linea del contatto. Viene conseguentemente definito dall'equazione di Young:[5]

$$\gamma_{sv} \quad \gamma_{sl} \quad \gamma_{lv} \quad \cos\theta$$

dove γ_{sv}, γ_{sl} e γ_{lv} sono, rispettivamente, le tensioni superficiali all'interfase solido/vapore, solido/liquido e liquido/vapore.

Una superficie idrofila reca gruppi polari, come ad esempio gruppi OH o gruppi carbossilici, che promuovono interazioni con le molecole d'acqua (legami di idrogeno, interazioni elettrostatiche, ecc.). Le forze attrattive prevalgono, l'angolo di contatto é basso (minore di 90°, *Fig. 1a*).

Una superficie idrofoba non presenta gruppi polari (come un polimero, ad esempio). Al contatto con una goccia d'acqua si instaurano solo interazioni blande dovute alla forze di dispersione tipo London. La componente adesiva è bassa, l'angolo di contatto è elevato (maggiore di 90°, *Fig. 1b*).

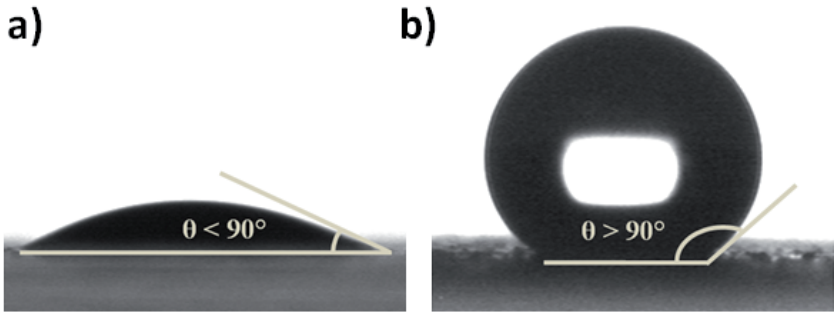


Fig. 1. a) Superficie idrofila (θ < 90°); b) Superficie idrofila (θ > 90°).

3. Superfici superidrofobiche

Negli ultimi decenni molta parte della ricerca relativa al controllo delle caratteristiche di bagnabilità di solidi è stata dedicata allo sviluppo di superfici superidrofobiche. Una superficie viene definita superidrofobica quando gli angoli di contatto di acqua sono maggiori di 150° e l'adesione tra le gocce di liquido e la superficie è molto bassa. La superidrofobicità è il risultato della combinazione delle caratteristiche idrofobiche del materiale con specifici aspetti morfologici della superficie.[6]

Molti materiali naturali raggiungono condizioni di superidrofobi-

cità a temperatura ambiente. Il piumaggio delle anatre e gli arti dei gerridi (pond skaters) presentano elevata idrofobicità con angoli di contatto intorno a 150-170°. In più l'adesione è molto bassa e questo contribuisce a rendere le gocce d'acqua molto mobili. In modo del tutto analogo più di 200 tipi di piante presentano comportamento superidrofobico; la più famosa è senz'altro il loto, le cui foglie non trattengono le gocce di pioggia. Dato che le gocce di pioggia portano con sé, rotolando via, la polvere depositata sulle foglie si dice spesso che questi materiali sono autopulenti, o che presentano il cosiddetto "effetto foglia di loto". Osservando questi diversi tipi di materiali naturali al microscopio elettronico si può osservare la presenza di microstrutture, in una scala di circa 10 m. Si possono apprezzare forme differenti: rilievi (come nel caso del loto e di molte altre piante), punte/aculei (nel caso dei gerridi) o microfibre (nel caso di alcune piante). In più si è spesso osservata la presenza anche di strutture superficiali in una scala ancora più piccola, di taglia nanometrica.[7]

A fronte della numerose applicazioni connesse con l'uso di superfici superidrofobiche, per impieghi nei campi più disparati dalla corrosione[8] all'energetica,[9] dalla microfluidica[10] alla foto-fisica,[11] sistemi biomimetici sono stati sviluppati combinando le caratteristiche idrofobiche con l'introduzione di rugosità superficiale controllata. Molti possono essere gli approcci per ottenere una superficie superidrofobica. Li *et al.*,[12] ad esempio, riportano la crescita tramite pirolisi di nano tubi di carbonio, allineati e densamente impaccati, successivamente trattati con fluoroalchilsilani. In molti casi i percorsi sintetici per ottenere questi sistemi sono complessi e richiedono più stadi sintetici: trattamenti laser abbinati ad etching chimico[10], tecnologia del grafene promossa da trattamenti laser,[9] o elettrodeposizione completata da trattamenti idrofobizzanti.[8] Nel nostro gruppo abbiamo sviluppato una procedura sintetica molto semplice utilizzando sistemi ibridi basati su ossidi.[13] La metodica si basa sulla funzionalizzazione diretta tramite diversi alchilsilani, sia florurati sia non-florurati, di nanoparticelle di biossido di titanio preparate in laboratorio tramite metodo sol-gel. Le particelle di biossido di titanio forniscono una rugosità multiscala, anche a seguito di fenomeni di aggregazione, che congiuntamente con l'idrofobicità introdotta dagli alchilsilani producono caratteristiche di superidrofobicità e/o olefobicità. Questi sistemi presentano eccellenti proprietà antimacchia come osservabile dalla *Fig. 2a*: tutta la superficie del vetrino mostrato in figura è ricoperta con polvere di titania, ma solo metà di essa è stata funzionalizzata con alchilsilani; quest'ultima mostra caratteristiche antimacchia quando del vino è versato sul vetrino, mentre la superficie ricoperta da solo

biossido di titanio si impregna di liquido a causa del comportamento nativo idrofilico dell'ossido. Inoltre l'utilizzo del biossido di titanio permette, grazie alle sue caratteristiche di semiconduttore, di progettare superfici con zone di idrofilicità/idrofobicità controllata, tramite litografia fotocatalitica:[14] la superficie ricoperta con biossido di titanio superidrofobico viene irraggiata con luce UV attraverso una maschera; nelle zone irraggiate, le catene alchiliche dell'alchilsilano vengono degradate fotocataliticamente, ripristinando l'idrofilicità nativa dell'ossido, mentre nelle zone coperte dalla maschera viene preservata l'idrorepellenza (*Fig. 2b*). Questa possibilità è molto interessante dato che la localizzazione controllata di isole idrofile e idrofobiche può essere rilevante per numerose proprietà chimico fisiche di un sistema quali, ad esempio il trasporto contemporaneo di elettroliti e bolle di gas in sistemi complessi di flusso.[15,16]

Oltre ai sistemi superidrofobici la natura ci offre anche esempi di condizioni di bagnabilità estreme quali la completa non-bagnabilità, $\theta = 180°$. L'effetto Leidenfrost, ad esempio, si verifica quando vengano depositate gocce di acqua su supporti molto caldi (generalmente T > 200°C, molto al di sopra della temperatura di ebollizione). In questo caso le gocce non solo non bagnano la superficie ma sfuggono molto rapidamente. Di fatto la goccia non contatta mai il solido, perché un film di vapore si forma tra il solido ed il liquido e fa lievitare le gocce. Anche nel caso dei marmi liquidi, gocce di acqua ricoperti da nano-micro particelle idrofobiche, si riproduce un fenomeno naturale, che è quello creato dalla melata prodotta da molti insetti. Anche in questo caso si possono raggiungere condizioni di completa non bagnabilità.

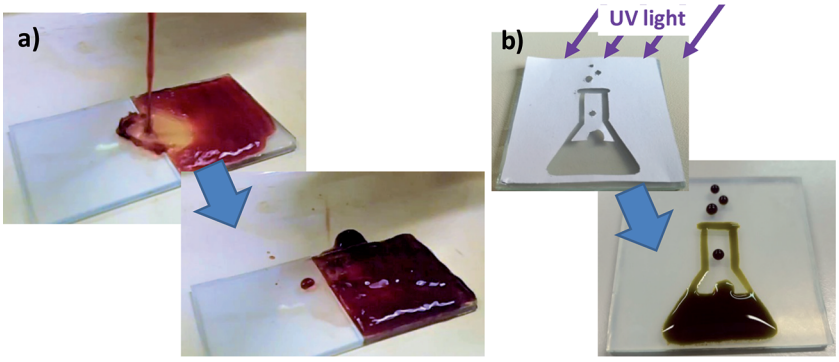


Fig. 2. Applicazioni di film superidrofobici a base di biossido di titanio: a) superfici antimacchia e b) litografia foto catalitica.

4. Superidrofilicità

All'estremo opposto rispetto ai sistemi superidrofobici troviamo le superfici superidrofile. In questi sistemi, le gocce di acqua si spandono sulla superficie creando un sottile film continuo con angolo di contatto prossimo a zero. Anche in questo caso le applicazioni sono numerose si pensi a maschere o visiere di caschi nei quali l'umidità o l'acqua non formano gocce ma si spandono completamente mantenendo intatta la trasparenza.

Nel nostro gruppo abbiamo sviluppato film trasparenti superidrofili[17] sfruttando l'attività fotocatalitica del biossido di titanio. Gli strati di TiO_2 vengono ottenuti tramite deposizione elettrochimicamente assistita da un sol di titania. Le caratteristiche di semiconduzione del biossido di titanio promuovono una transizione fotoindotta da valori di idrofilicità intermedia (θ circa 30°) alla superidrofilicità. Il meccanismo alla base della superidrofilicità foto indotta è stato proposto per la prima volta da Fujishima *et al.*[18] ed è stato attribuito alla formazione di gruppi OH superficiali che seguono la creazione di vacanze di ossigeno alla superficie del semiconduttore per effetto dell'irraggiamento. In *Fig. 3* si può apprezzare come film, sottoposti ad irraggiamento, mostrino caratteristiche spiccate antiappannamento mantenendo una trasparenza ottimale.

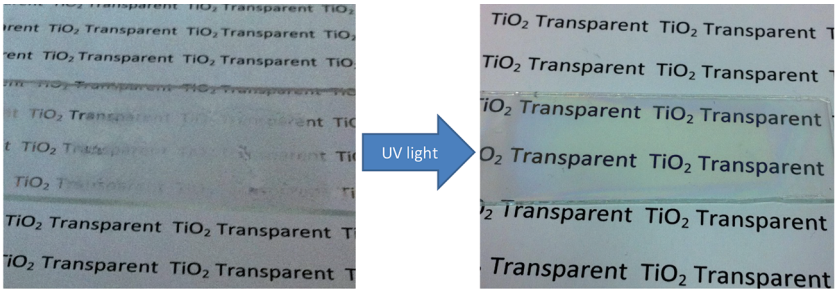


Fig. 3. Proprietà antiappannamento dei film di biossido di titanio irraggiati con luce UV.

Conclusioni

La modulazione della bagnabilità delle superfici ha notevole interesse applicativo, anche a causa della sua correlazione con le proprietà di adesione. La ricerca in questo ambito ha tratto ampia ispirazione dai

materiali di origine animale e vegetale, i quali hanno permesso di comprendere i meccanismi alla base della bagnabilità delle superfici e di identificare le caratteristiche fondamentali per costruire superfici a bagnabilità controllata. In particolare, lo studio dei materiali naturali ha permesso di identificare la sinergia tra aspetti morfologici e composizionali per lo sviluppo di superfici dotate di bassissima bagnabilità e adesione. Traendo ispirazione dalla natura, i ricercatori hanno così sviluppato diversi materiali con caratteristiche di superidrorepellenza, anche caratterizzate da bagnabilità anisotropa. Negli ultimi decenni, sono stati inoltre creati materiali che non hanno paralleli in natura, come le superfici superomnifobiche, superfici superidrofobiche costituite unicamente da materiali idrofilici e materiali smart con caratteristiche di bagnabilità alterate da stimoli esterni, quali la luce. Le sfide che rimangono da affrontare riguardano principalmente la durevolezza di questi materiali, per renderli resistenti alle sollecitazioni legate all'usura ed alle condizioni ambientali sfavorevoli.

BIBLIOGRAFIA

1. F. El-Taboni, E. Caseley, M. Katsikogianni, L. Swanson, T. Swift, M.E. Romero-González, *Fluorescence Spectroscopy Analysis of the Bacteria–Mineral Interface: Adsorption of Lipopolysaccharides to Silica and Alumina*, **Langmuir**, 2020, 36, 1623-1632.
2. W. Zhang, J.X. Li, R.C. Tang, A.D.Zhai, *Hydrophilic and antibacterial surface functionalization of polyamide fabric by coating with polylysine biomolecule*, **Progr. Org. Coating**, 2020, 142, 105571.
3. P. Wan, J. Wu, L. Tan, B. Zhang, K. Yang, *Research on super-hydrophobic surfaces of biodegradable magnesium alloys used for vascular stents*, **Mater. Sci. Eng**., 2013, C33, 2885-2890.
4. Y. Mao, F. Wang, Y. Li, R. Guidoin, L. Wang, F. Wang, *Facile fabrication of potent superhydrophobic surface on physical barriers with enhanced anti-adhesion e ciency*, **Appl. Surf. Sci**., 2020, 517, 146104-146114.
5. T. Young, *An Essay on the Cohesion of Fluids*, **Phil. Trans. R. Soc. London** 1805, 95, 65–87.
6. M. Callies, D. Querè, *On water repellency*, **Soft Matter**, 2005, 1, 55-61.
7. D. Querè, *Wetting and Rougness*, **Annu. Rev. Mater. Res**., 2008, 38, 71-99.
8. Z. Yu, C. Zhou, R. Liu, Q. Zhang, J. Gong, D. Tao, Z. Ji, *Fabrication of Superhydrophobic Surface with Enhanced Corrosion Resistance on H62 brass Substrate*, **Colloids Surfaces A**, 2020, 589, 124475.
9. X. Li, C. Jiang, F. Zhao, Y. Shao, Y. Ying, J. Ping, *A self-charging device with bionic self-cleaning interface for energy harvesting*, **Nano Energy**, 2020, 73, 104738- 104747

10. H. Gao, Y. Liu, G. Wang, S. Li, Z. Han, L. Ren, *Biomimetic Metal Surfaces Inspired By Lotus And Reed Leaves for Manipulation of Microdroplets or Fluids*, **Appl. Surf. Sci**., 2020, 519, 146052-146063.
11. D. A. Loy, B. Mather, A. R. Straumanis, C. Baugher, D. A. Schneider, A. Sanchez, K. J. Shea, *Effect of pH on the Gelation Time of Hexylene-Bridged Polysilsesquioxanes*, **Chem. Mater.** 2004, 16, 2041–2043
12. H. Li, X. Wang, Y. Song, Y. Lin, Q. Li, L. Jiang, D. Zhu, *Super " Amphiphobic" Aligned Carbon Nanotube Films*, **Angew. Chem. Int. Ed.,** 2001, 40, 1743,
13. F. Milanesi, G. Cappelletti, R. Annunziata, C. L. Bianchi, D. Meroni, S. Ardizzone, *Siloxane-TiO_2 Hybrid Nanocomposites. The Structure of the Hydrophobic Layer*, **J. Phys. Chem. C**, 2010, 114, 8287-8293.
14. G. Soliveri, R. Annunziata, S. Ardizzone, G. Cappelletti, D. Meroni, *Multiscale rough TiO_2 films with patterned hydrophobic/oleophobic features*, **J. Phys. Chem. C**, 2012, 116, 26405–26413
15. Y. Shi, S. Cheng, S. Quan, *Fractal-Based Theoretical model on saturation and Relative Permeability in the Gas Diffusion Layer of Polymer Electrolyte Membrane Fuel Cells*, **J. Power Sources** 2012, 209, 130– 140.
16. H. Su, T. Wang, S. Zhang, J. Song, C. Mao, H. Niu, B. Jin, J. Wu, Y. Tian, *Facile Synthesis of Polyaniline / TiO_2 / Grapheme Oxide Composite for High Performance Supercapacitors*, **Solid State Sci**. 2012, 14, 677–681.
17. A. Antonello, G. Soliveri, D. Meroni, G. Cappelletti, S. Ardizzone*, Photocatalytic Remediation of Indoor Pollution by Transparent TiO_2 Films*, **Catal. Today**, 2014, 230, 35-40.
18. R. Wang, K. Hashimoto, A. Fujishima, M. Chikuni, E. Kojima, A. Kitamura, M. Shimohigoshi, T. Watanabe, *Light-induced amphiphilic surfaces*, **Nature** 1997, 388, 431-432.

AROMI NATURALI: LEGISLAZIONE E SINTESI

STEFANO SERRA (*)

Nota presentata dal m.e. C. Fuganti
(Adunanza del 12 aprile 2018)

SUNTO. – In questa nota sono descritte le principali normative che regolano la produzione, classificazione e commercializzazione degli aromi. Viene anche descritto in dettaglio l'effetto che la normativa stessa ha portato nell'ambito dello sviluppo di nuovi metodi di sintesi degli aromi naturali.

***

ABSTRACT. – This report describes the legal regulations concerning flavour production, classification and marketing. The effect that the legislation itself has brought in the development of new methods of synthesis of natural flavors is described in detail.

1. INTRODUZIONE

Con il termine aroma si intendono sostanze utilizzabili in alimenti. Le fragranze sono invece impiegate per uso esterno (profumi). La distinzione non è sempre netta, esistono sostanze aromatiche utilizzabili come fragranze (mentolo, linalolo).

Il mercato globale degli aromi e delle fragranze è in continua crescita. Nel 2015 ha raggiunto un valore complessivo di 23.6 miliardi di dollari, di cui circa il 55% legato alla vendita di aromi. Stime di mercato prevedono un aumento di crescita globale corrispondente al 5% annuo

(*) C.N.R., Istituto di Chimica del Riconoscimento Molecolare (ICRM), Milano, Italy. E-mail: stefano.serra@cnr.it; stefano.serra@polimi.it

almeno fino al 2020. I produttori di aromi sono essenzialmente le industrie chimiche. Una parte consistente degli aromi presenti sul mercato è di origine estrattiva ma l'industria chimica è produttrice sia di aromi 'naturali' sia di aromi 'sintetici'.

In questo contesto, i consumatori richiedono preparazioni che contengano aromi 'naturali'. Il termine naturale lascia intendere che la sostanza venga dal mondo vegetale, non sia prodotta industrialmente e non siano stati usati OGM o reagenti chimici per produrla. Sull'onda di queste preferenze sono nate quindi molte certificazioni quali 'aroma naturale', 'OGM free' e 'biologico' (organic), nonché certificazioni legate a specifiche regole religiose quali 'Kosher' o 'Halal'.

Come viene regolata da un punto di vista normativo la produzione ed il commercio di questi prodotti? Quale effetto hanno avuto le normative vigenti nell'ambito della chimica degli aromi?

La relazione che segue cercherà di rispondere a queste domande.

2. Chimica e quadro normativo

Da un punto di vista chimico non c'è nessuna differenza tra un dato composto chimico prodotto per sintesi e lo stesso composto estratto da una fonte naturale. A seconda del processo produttivo si possono avere differenze nell'ambito del profilo delle impurezze, della purezza isomerica (nel caso di stereoisomeri) o dell'abbondanza isotopica di specifici atomi presenti nella molecola ma i singoli composti chimici sono identici.

Il punto cardine della normativa vigente risiede nell'ammissibilità di un dato composto aromatico negli alimenti e nella definizione di naturale. I criteri di ammissibilità e naturalità possono differire da stato a stato. Le organizzazioni legate alla sicurezza alimentare indicano gli aromi ritenuti sicuri e chiedono l'eliminazione di quelli potenzialmente pericolosi. Contrariamente all'opinione comune molte sostanze naturali sono tossiche ed è possibile che esistano aromi 'naturali' non ammessi in alimenti.

L'industria chimica necessita di un quadro normativo chiaro. La produzione si adatta alle richieste di mercato a patto che la preparazione di 'aromi naturali' sia profittevole e sia possibile certificare l'origine (la naturalità). Di conseguenza diverse organizzazioni internazionali si sono occupate di creare direttive su questa tematica. Le più importanti

sono elencate di seguito, con annessa la descrizione della loro principale attività (descrizione ottenuta dallo statuto dell'organizzazione stessa)

- **CODEX ALIMENTARIUS**: Currently the Codex Alimentarius Commission has **189** Codex Members made up of 188 Member Countries and 1 Member Organization (The European Union). The Codex Alimentarius is intended to guide and promote the elaboration and establishment of definitions and requirements for foods to assist in their harmonization and in doing so to facilitate international trade.
- **JECFA**: Joint FAO/WHO Expert Committee on Food Additives. JECFA is an international scientific expert committee administered jointly by the Food and Agriculture Organization of the United Nations (FAO) and WHO.
- **FEMA**: Flavor and Extract Manufacturers Association of the United States. FEMA is committed to assuring a substantial supply of safe flavoring substances.
- **EFSA**: European Food Safety Authority. L'Autorità europea per la sicurezza alimentare (EFSA) fornisce consulenze scientifiche indipendenti sui rischi connessi all'alimentazione.
- **FCC**: **Food Chemicals Codex** is a collection of internationally recognized standards for the purity and identity of food ingredients.

Sebbene le organizzazioni internazionali abbiano fornito importanti line guida (ad esempio CODEX ALIMENTARIUS ha fornito la Codex Guidelines for Flavoring CAC-GL 66/2008), la produzione mondiale degli aromi naturali è influenzata principalmente dall'attività legislative di Stati Uniti ed Unione Europea in cui si colloca una grossa fetta del mercato mondiale degli aromi naturali.

Altri stati quali Cina, Giappone, India, Federazione Russa, e paesi del Mercosur (Mercato comune dell'America meridionale) sebbene siano grossi produttori e consumatori di aromi naturali hanno una legislazione meno rigida rispetto a Stati Uniti ed Unione Europea.

In passato gli aromi venivano divisi in tre classi (Codex Food Additives and Contaminants (CCFAC) – 1972 / Codex Food Labelling (CCFL) – 1985):

- **Aromi naturali** (estratti da fonti naturali o preparati da precursori naturali con metodi naturali).
- **Aromi naturali identici** (aromi prodotti per sintesi ma chimicamente identici ad aromi naturali).
- **Aromi Artificiali** (aromi prodotti per sintesi, non presenti in natura).

Questa classificazione è ancora valida in alcuni paesi quali ad esempio India e Brasile.

La classificazione CODEX in vigore identifica invece solo due tipi di aromi: aromi naturali e sostanze aromatiche sintetiche. Di seguito le definizioni (*Codex Guidelines for Flavoring CAC-GL 66/2008)*:

Natural flavouring substances are flavouring substances obtained by physical processes that may result in unavoidable but unintentional changes in the chemical structure of the components of the flavouring (*e.g.* distillation and solvent extraction), or by enzymatic or microbiological processes, from material of plant or animal origin. Such material may be unprocessed, or processed for human consumption by traditional food-preparation processes (*e.g.* drying, torrefaction (roasting) and fermentation). This means substances that have been identified /detected in a natural material of animal or vegetable origin.

Synthetic flavouring substances are flavouring substances formed by chemical synthesis.

Anche l'Unione Europea identifica solo due categorie di aromi: aromi naturali ed aromi. La normativa di riferimento è il **Regolamento N. 1334/2008 del 16/12/2008** [1] ed in particolare l'art. 3, comma c recita:

> ' per «sostanza aromatizzante naturale» s'intende una sostanza aromatizzante ottenuta mediante appropriati procedimenti fisici, enzimatici o microbiologici da un materiale di origine vegetale, animale o microbiologica, che si trova allo stato grezzo o che è stato trasformato per il consumo umano mediante uno o più procedimenti tradizionali di preparazione degli alimenti di cui all'allegato II. Le sostanze aromatizzanti naturali corrispondono a sostanze normalmente presenti e identificate in natura;'

3. Aromi e Aromi artificiali, due mercati separati

Sebbene con differenti sfumature, le normative vigenti contribuiscono a creare due mercati differenti. In particolare le regole stringenti delineate dai legislatori per regolamentare la produzione di aromi naturali rendono questi composti assimilabili a prodotti ad alto valore aggiunto, in quanto sono necessari processi molto più complessi e/o costosi per la loro preparazione. In particolare l'esigenza di sviluppare processi basati sull'uso di reazioni enzimatiche o trasformazioni microbiologiche ha favorito lo sviluppo di molti studi scientifici legati alle

biotrasformazioni [2]. Sono illustrati di seguito due esempi rilevanti legati alla produzione industriale della vanillina e dei lattoni.

3.1 Sintesi della vanillina

La vanillina è un aroma di largo consumo. La vanillina preparata per sintesi chimica è molto meno costosa di quella naturale (estratta dalle bacche di vaniglia oppure ottenuta per trasformazione microbiologica). Nello schema seguente (*Fig. 1*) è descritto il principale metodo di sintesi della vanillina artificiale. I composti di partenza sono il guaiacolo e l'acido gliossilico, disponibili a basso prezzo in quanto preparati dall'industria petrolchimica. La sequenza di reazioni che viene usata prevede l'uso di reagenti molto semplici quali la soda caustica, l'ossigeno dell'aria ed una catalisi acida. Complessivamente il processo illustrato porta sul mercato vanillina ad alta purezza con un prezzo di circa 15-20 euro/Kg.

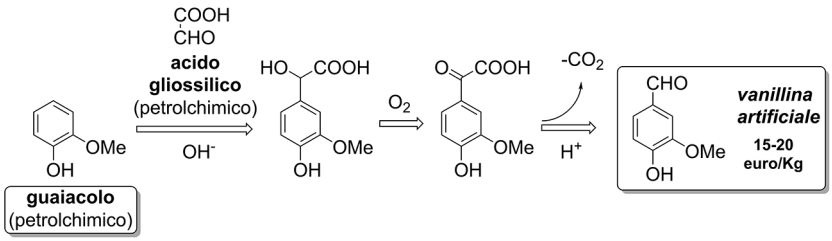


Fig. 1. Sintesi industriale della vanillina dal guaiacolo.

Del tutto diversi sono i processi per la preparazione della vanillina naturale (*Fig. 2*). Ne esistono molti e per poter essere conformi alla regolamentazione internazionale sono basati sull'utilizzo di precursori naturali (usualmente estrattivi) seguiti dalla loro biotrasformazione in vanillina [3]. L'estrazione della vanillina stessa dalle bacche è ancora un processo molto usato anche se tra i più costosi in termini di resa. Uno tra i processi biotecnologici più usati è basato sulla degradazione microbica dell'acido ferulico che viene a sua volta ottenuto per estrazione della pula di riso.

Altri processi sono basati sulla biotrasformazione di prodotti naturali quali l'eugenolo, l'isoeugenolo e l'isorapontina. Data la variabilità dei metodi di sintesi, il prezzo della vanillina naturale può passare dai 1000 euro/Kg ai 5000 euro/Kg (vanillina da bacche), quindi almeno cinquanta volte superiore a quello della vanillina artificiale.

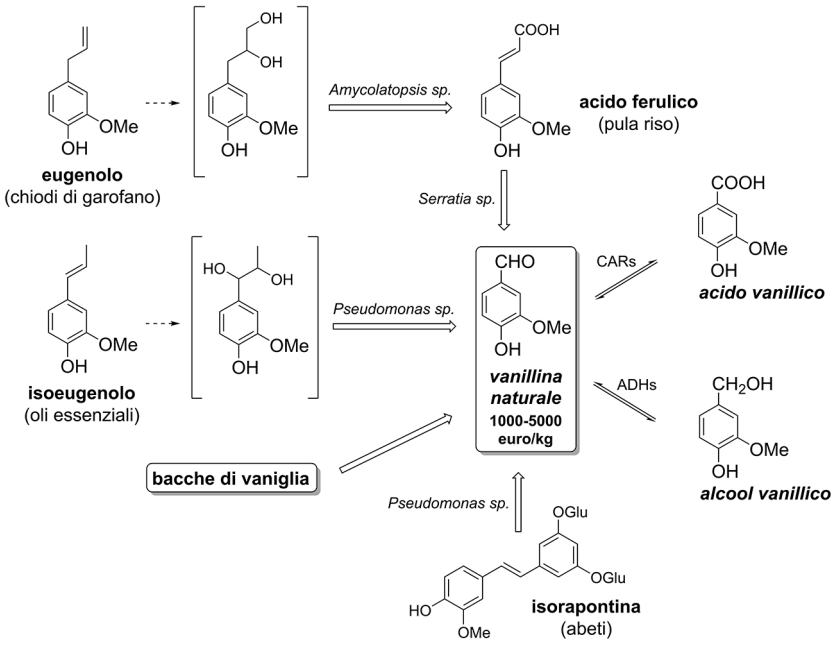


Fig. 2. Sintesi della vanillina naturale.

3.2 Sintesi dei lattoni naturali

I gamma-lattoni decalattone e dodecalattone sono composti largamente usati per conferire aroma pesca ad alimenti e bevande. Questi lattoni sono facilmente ottenibili per sintesi e sono quindi disponibili a basso prezzo. In natura sono però presenti solo in tracce e quindi l'estrazione dai vegetali che li contengono non è un processo fattibile. In questo ambito le biotecnologie hanno permesso la produzione di numerosi lattoni in forma naturale. Il decalattone (*Fig. 3*) è attualmente prodotto dall'olio di ricino mediante un processo a due steps [4]. Nel primo si idrolizza l'olio con una lipasi a dare l'acido ricinoleico. Successivamente l'acido viene degradato mediante una trasformazione microbica mediata da un lievito a dare il decalattone. Sebbene le rese complessive non siano elevate, l'olio di ricino ha un prezzo di pochi euro/Kg mentre il gamma-decalattone naturale è venduto a diverse centinaia di euro/Kg. IL processo è quindi particolarmente profittevole ed ha portato sul mercato una consistente quantità di questo lattone in forma naturale.

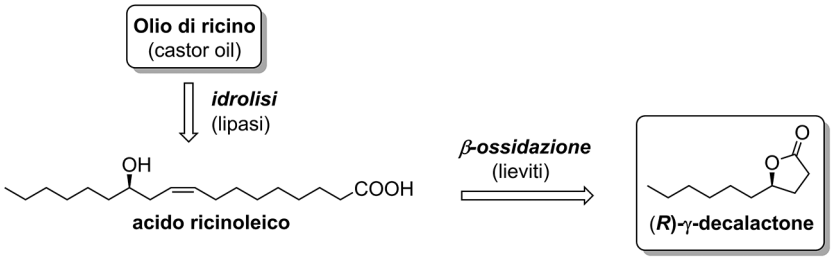


Fig. 3. Produzione industriale del gamma-decalattone naturale.

4. Conclusioni

Le preferenze dei consumatori hanno influenzato marcatamente l'industria di produzione degli aromi. In particolare si sono creati due differenti mercati: quello degli aromi e quello degli aromi naturali. L'elevato valore aggiunto generato dalla classificazione 'naturale', ha spinto verso la creazione di nuove aziende biotecnologiche nonché lo studio di nuove procedure sintetiche che siano in accordo con la regolamentazione vigente nel campo degli aromi naturali. La necessità di tracciare/appurare la naturalità di un dato aroma, ha stimolato la ricerca nel campo analitico in particolare nell'ambito dell'autenticazione ed in quello dell'identificazione e caratterizzazione di nuovi aromi naturali.

BIBLIOGRAFIA

[1] Regolamento (CE) n. 1334/2008 del Parlamento europeo e del Consiglio, del 16 dicembre 2008 , relativo agli aromi e ad alcuni ingredienti alimentari con proprietà aromatizzanti destinati a essere utilizzati negli e sugli alimenti e che modifica il regolamento (CEE) n. 1601/91 del Consiglio, i regolamenti (CE) n. 2232/96 e (CE) n. 110/2008 e la direttiva 2000/13/CE (Testo rilevante ai fini del SEE).

[2] Serra, S.; Fuganti, C.; Brenna, E. Biocatalytic Preparation of Natural Flavours and Fragrances. *Trends Biotechnol.* **2005**, *23* (4), 193–198. https://doi.org/10.1016/j.tibtech.2005.02.003.

[3] Kaur, B.; Chakraborty, D. Biotechnological and molecular approaches for vanillin production: A review. *Appl. Biochem. Biotechnol.* **2013**, *169*, 1353-1372.

[4] Wache, Y.; Aguedo, M.; Nicaud, J.-M.; Belin, J.-M. Catabolism of Hydroxyacids and Biotechnological Production of Lactones by Yarrowia Lipolytica. *Appl. Microbiol. Biotechnol.* **2003**, *61* (5–6), 393–404. https://doi.org/10.1007/s00253-002-1207-1.

STEPHEN HAWKING: SPACE, TIME AND QUANTA

MAURO CARFORA (*)

Nota presentata dal m.e. Giacomo Mauro D'Ariano
(Adunanza del 12 aprile 2018)

Sunto. – Una breve introduzione alla figura scientifica di Stephen Hawking e ai suoi contributi alla comprensione dell'interazione fra relatività generale e teoria quantistica.

* * *

Abstract. – A brief introduction to the scientific work of Stephen Hawking and to his contributions to our understanding of the interplay between general relativity and quantum theory.

1. Introduction

The scientific life of Stephen Hawking follows a path that eventually led him to establish some of the most relevant theoretical results in general relativity, from the properties of black holes and spacetime singularities, to the introduction of the revolutionary circle of ideas and techniques that go under the name of *Hawking (Black Hole) Radiation*. This is arguably the most significant result in the still ongoing attempt to reconcile general relativity with quantum theory, an attempt which, in the words of Roger Penrose, represents *the most fundamental unsolved foundational issue in Physics*.

(*) Department of Physics, University of Pavia. Italian National Group of Mathematical Physics, and INFN Pavia Section, Italy. E-mail: mauro.carfora@unipv.it

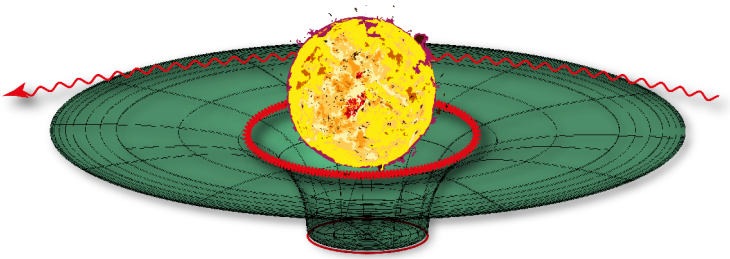


Fig. 1 – The bending of light caused by the curved geometry of space.

2. Gravity

Our story begins with gravity, the weakest among the known interactions, but the most evident because it is universal: gravity acts in the same manner on every form of mass–energy, hence its effects are cumulative. Moreover, gravity is a force which affects every particle in the same way, as first recognized by Galileo, a basic observation which expresses the universality of free fall: All free-falling bodies with negligible gravitational self–interactions follow the same path if they have the same initial velocities. This is the weak Principle of Equivalence which allows us to eliminate the local gravitational field. Stated more precisely, in Newtonian mechanics we have the freedom of choosing at any point (and at a given instant of time) a (non–rotating) local frame of reference in which the gravitational field, at the given point and at the given instant, can be eliminated and in which Newton equations of motion take the form they have in an inertial frame. This cannot be a peculiarity of the laws of Newtonian mechanics and with a bold step Einstein extended this property, with his Equivalence Principle, to all physical laws: In all non–rotating free–falling local frames of reference: the so-called *Local Inertial Frames (LIF)*), the non-gravitational laws of physics take the same form they have, in absence of gravity, in the inertial frames of Minkowski spacetime. In other words, non-gravitational physics in each local inertial frame is the physics of special relativity in absence of gravity, in particular in a LIF light propagates in vacuum as in special relativity. It follows that around a gravitating source light propagation is described by the collection of *local light cones* associated with the local inertial frames surrounding the

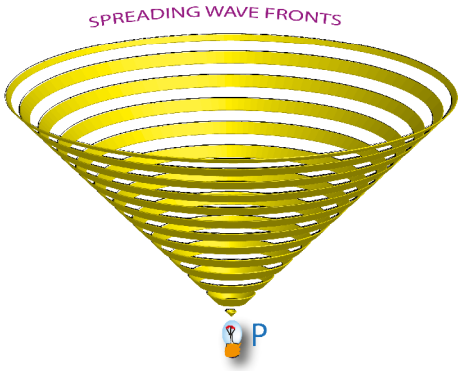


Fig. 2 — The future light cone as a collection of spreading wave fronts issuing from an event.

gravitational source: Gravity bends light (both via the geometry of time and, in a more significant way, via the geometry of space) (*Fig. 1*).

In a definite sense, the basic role of the light cone and causality in general relativity is the key for understanding Hawking's results. Let us recall that the future light cone at an event P may be thought of as the world-history of the propagation of a light-front emitted (in vacuum) by a light-flash at P. Each light-front is a 2-sphere expanding from P. Similarly, the past light cone at P is the world history of a light front converging into P (*Fig. 2*).

It is worthwhile to stress that the light cone is not a peculiarity of electromagnetism. The propagation of every massless field is characterized by this propagative cone, and its structure is a property of Minkowski spacetime. The causality principle together with special relativity implies that no physical signal can travel faster than light. It follows that the light cone determines the causal structure: how spacetime events are causally related to each other (*Fig. 3*).

Hence, regardless of electromagnetism, the light cone can be identified as the characterization of the causal structure of Minkowski spacetime: given an event P, it tells us which event is in the past, in the future, or in the present of P. In special relativity the light cones are all equivalent: we can map one into any other via (active) Poincaré transformations. Hence, the causal structure of Minkowski spacetime is rigid. However, if we switch on gravity this is no longer true: the local inertial frames associ-

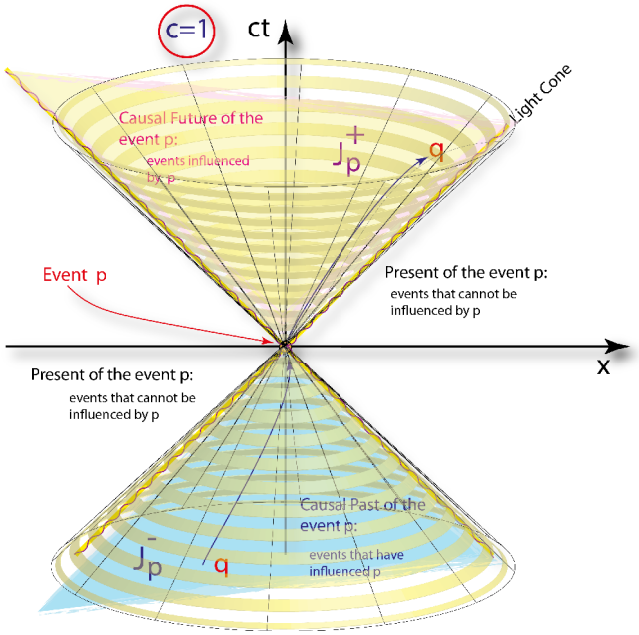


Fig. 3 — The light cone at the event p and the associated causal structure.

ated with two distinct events p and q nearby a gravitating mass accelerate (*Fig. 4*) one with respect to the other as a consequence of the local gradient of the gravitational field (tidal gravitational forces). The corresponding local light cones $\mathcal{C}_p$ and $\mathcal{C}_q$ are no longer congruent one to the other. It follows that gravity deforms (and determines) the causal structure of spacetime! The gravitational interaction forces us to a shift from the flat Minkowski spacetime, as the arena for (nongravitational) physics, to a curved Lorentzian manifold (M, g), where gravity is no longer a force but simply the manifestation of the dynamics of a curved spacetime (*Fig. 5*). This is General Relativity, the modern theory of gravitation governed by Einstein's equations,

$$Ric(g) - \frac{1}{2}\, g\, R(g) = \frac{8\pi G}{c^4}\, T$$

where $Ric(g)$ and $R(g)$ respectively are the Ricci and the scalar curvature associated with the spacetime metric g, T is the energy–momentum

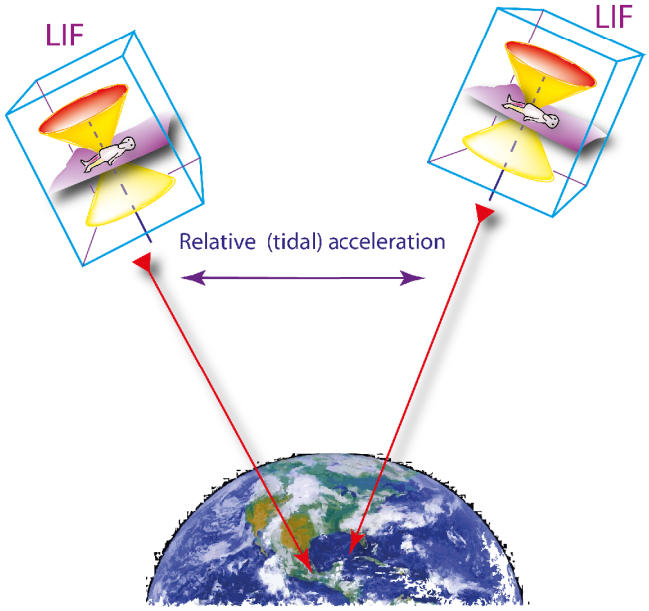


Fig. 4 – The relative acceleration between two local inertial frames generated by the gradient of the gravitational field (Tidal forces).

tensor describing the mass–energy sources present, G denotes the gravitational constant and c is the speed of light in vacuum. Notice the intrinsic non–linearity of the theory. Via the coupling $\frac{8\pi G}{c^4}$, the distribution of mass–energy T generates spacetime curvature. Conversely, spacetime curvature determines the evolution of the mass–energy sources via the freely-falling condition $div\, T = 0$, consequence of the contracted Bianchi identity $div\, \left(Ric(g) - \frac{1}{2}\, g\, R(g)\right) \equiv 0$, (where div is the tensorial divergence $\nabla_a\, T^{ab}$ associated with the Levi-Civita connection ∇ on the spacetime (M, g)). This non–linearity is the basic reason why Einstein theory is so complex and rich.

3. Black holes

The connection between spacetime geometry, causality and gravity is powerful but also leads to a severe problem: Gravitational Collapse and Singularities. In this connection, it is worthwhile to go through a back-of-

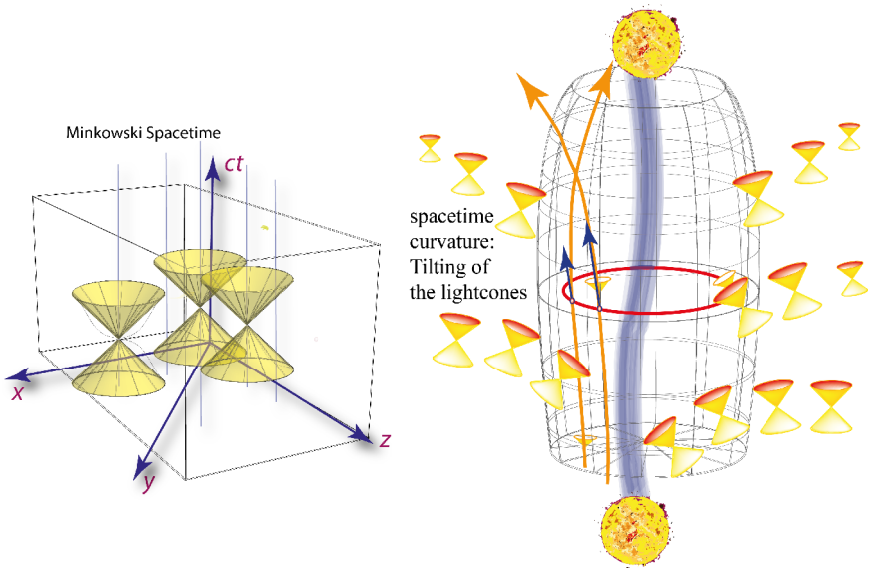


Fig. 5 – The causal structure in a curved spacetime is no longer rigid as in Minkowski spacetime: the lightcones react to the distribution and the evolution of the mass–energy present.

the-envelope calculation providing us a rough indication of the physical regime in which general relativity is relevant. From Newton theory, we know that gravity plays a significant role in the analysis of a physical phenomenon if the typical velocities v induced on a test particle by the gravitational attraction exerted by a mass M, concentrated in a region of radius r, are such that

$$\frac{1}{2}\, v^2 \simeq \frac{GM}{r}\ .$$

On the other hand, special relativity plays a significant role if the velocities involved in discussing a physical configuration are such that they approach, in modulus, the speed of light in vacuum, $|v| \simeq c$. It follows that general relativity is expected to play a significant role if $\frac{1}{2}\, c^2 \simeq \frac{GM}{r}$, *i.e.*, if the region where M is concentrated has a radius

$$r \simeq \frac{2GM}{c^2} := r_{Schw}$$

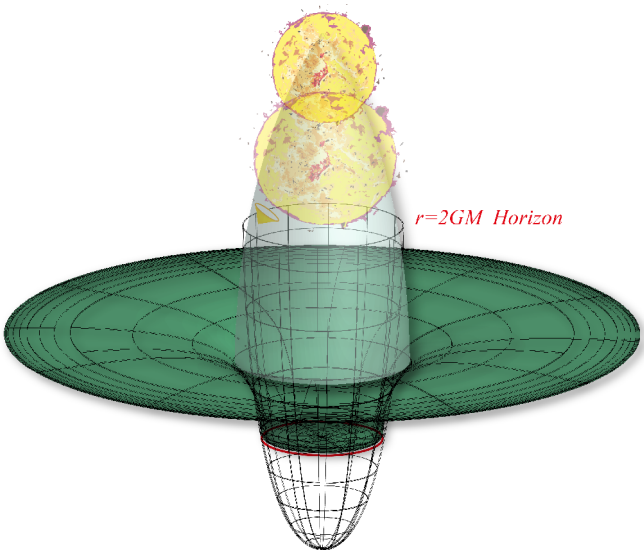


Fig. 6 — As the star evolves it may collapse under its own gravity. The more it gets concentrated in small regions the stronger are general relativistic effects. The Schwarzschild radius associated with the given mass of the star is the typical length scale signalling the relevance of general relativity in the modeling the gravitational dynamics of the star.

a quantity known as the Schwarzschild radius (*Fig. 6*) associated to the mass M. This general relativistic regime is put to the fore when a star collapses under its own gravity and evolves into a Black Hole: here the connection between causal structure and gravity features at its peak. It is well-known that the possibility of the existence of *Dark Stars* (black holes) had been already explored in Newtonian theory by John Michell (1783) [9], and Pierre-Simon de Laplace (1798) [8]. In the very words of J. Michell (paragraph 29 of his paper [9])

If there should really exist in nature any bodies, whose density is not less than that of the sun, and whose diameters are more than 500 times the diameter of the sun, since their light could not arrive at us; of if there should exists any other bodies of a somewhat smaller size, which are not naturally luminous; of the the existence of bodies under either of these circumstances, we could have no information from light; yet, if any other luminous bodies should happen to revolve about them we might still perhaps from the mo-

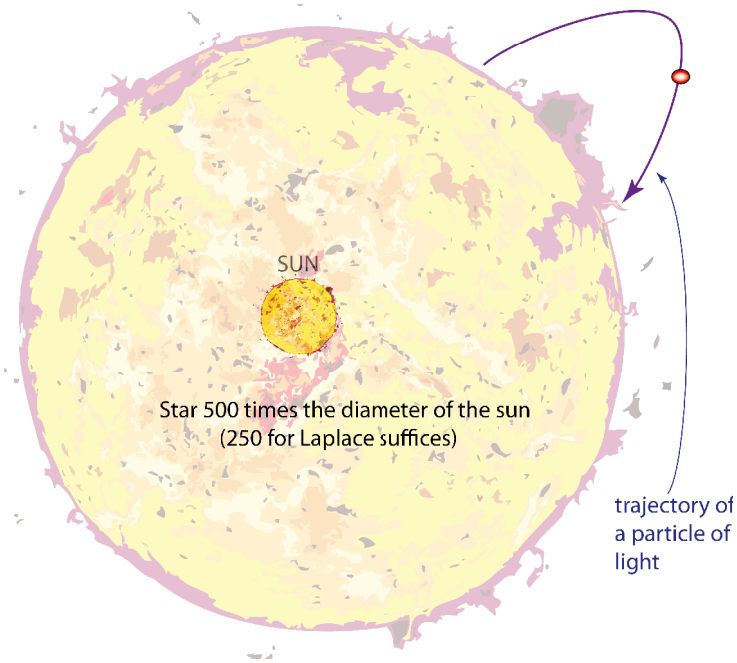


Fig. 7 – The relevant parameter for the existence of black stars in Newtonian theory is the total mass of the star rather than the density.

tions of these revolving bodies, which would not be easily explicable on any other hypothesis ... (*Fig. 7*)

This Newtonian result, which seems to imply that "the largest bodies in the Universe could remain invisible to us", is not dynamically very relevant, since it depends only on the mass of the star. However, according to general relativity, what matters is the dynamical concentration of a sufficiently large amount of matter in a sufficiently small region as to deflect light going out from the region so much that it can be dragged back inwards. This situation implies that matter, which cannot travel faster than light, is trapped in a region whose boundary decreases to zero within a finite proper time. A Black Hole is born, a spacetime singularity must occur (*Fig. 8*). The prescient work (1939) by Robert Oppenheimer and Hartland Snyder [10], describing the gravitational collapse of a ball of dust, was conducive to such a conclusion, but it was (erroneously) be-

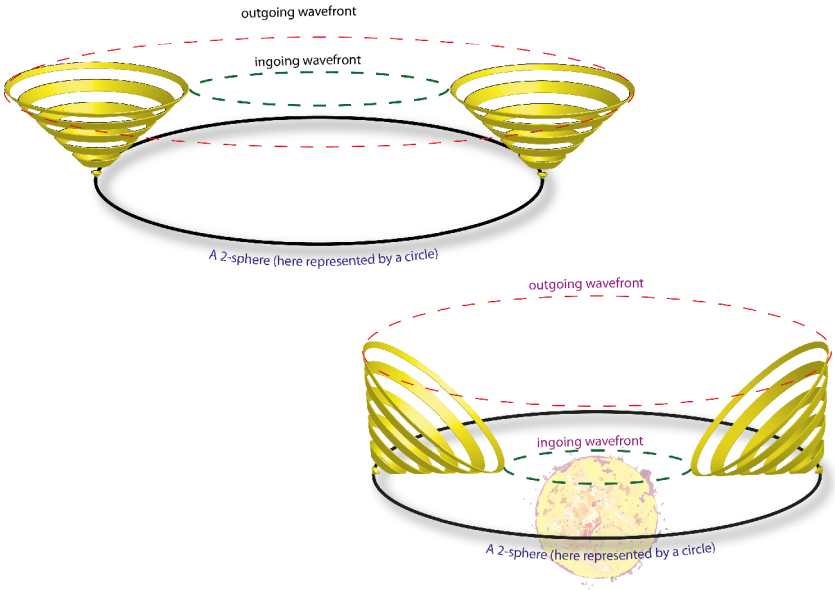


Fig. 8 — The presence of mass–energy concentrated in a given region deforms the distribution of spherical wavelets the envelope of which generates the ingoing and the outgoing wavefronts associated with the boundary of the region considered. When there is enough matter concentrated in the given region, the two families of future–pointing light rays emerging orthogonally from the boundary of the region considered are both (initially) convergent: a trapped surface has been generated.

lieved that the development of a singularity was an artifact of the spherical symmetry. That the onset of a singularity is a general consequence of gravitational collapse was proven in 1965 by R. Penrose in a remarkable paper [11] which laid the foundation of all subsequent work (and in particular of Hawking's work) on singularity theorems in general relativity. Penrose made use of modern techniques of differential geometry characterizing the spacetime singularities in terms of geodesic incompleteness, stressed the role of Cauchy hypersurfaces and introduced the notion of closed trapped surface, a two-dimensional closed surface which happens to be embedded in the given spacetime in such a way that the two families of future–pointing light rays emerging orthogonally from it are (initially) convergent (*Fig. 8*).

A fundamental example of the complex causal structure associated

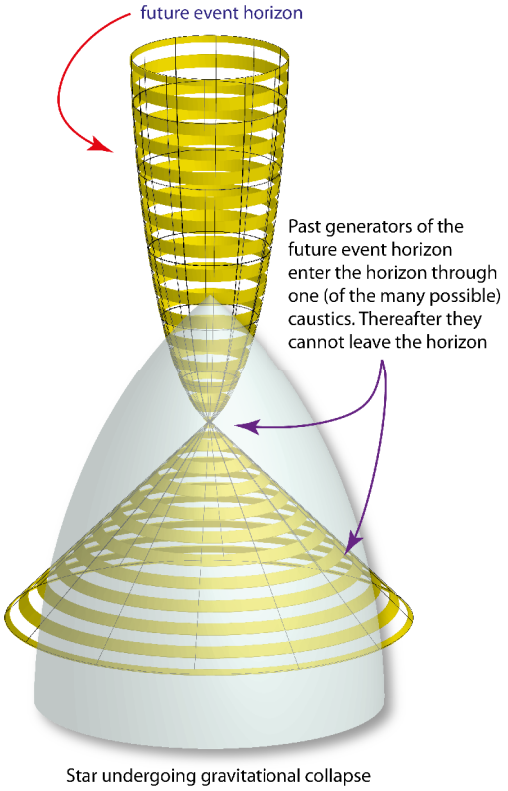


Fig. 9 – The generation of the future event horizon in a collapsing star.

with a radially collapsing star eventually evolving into a non-rotating black hole (*Fig. 9* and *Fig. 10*) is provided by Schwarzschild spacetime (M, g),

$$g = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \ ,$$

This is the solution of Einstein equations in vacuum ($Ric(g) = 0$) obtained, as early as 1916, by Karl Schwarzschild [13], and which geometrically describes an asymptotically Minkowskian spacetime endowed with spherical symmetry. A full understanding of the causal structure of this spacetime had to wait the 60s (after a long chain of contributions marked

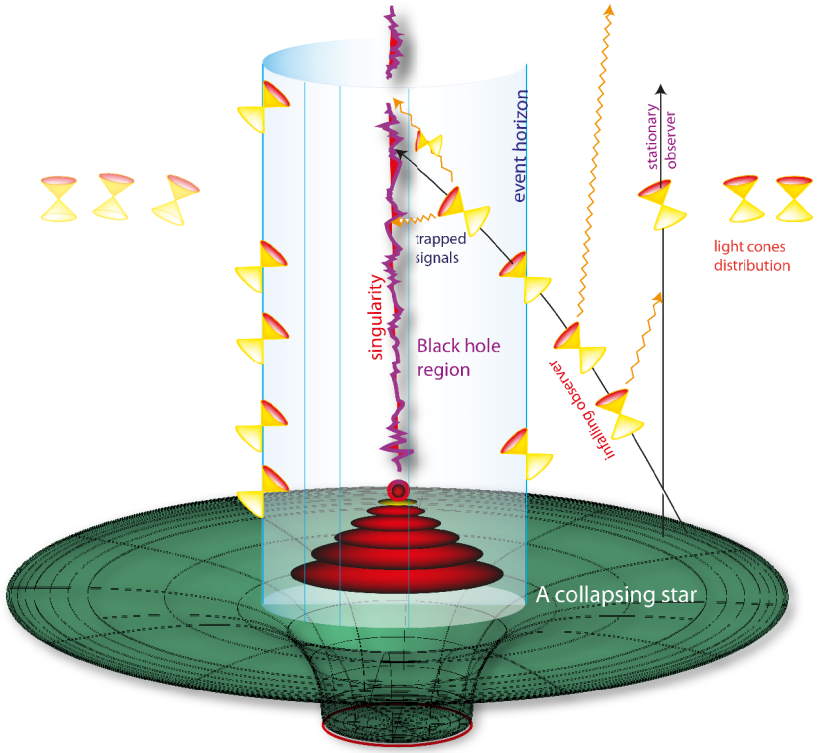


Fig. 10 – Schwarzschild spacetime describing a non-rotating black hole of mass M.

by G. Lemaitre, A. Eddington, J. L. Synge, M. Kruskal and G. Szekeres) when the nature of the formal singularity at the Schwarzschild radius $r = r_{Schw} = 2GM/c^2$ was eventually understood. The Schwarschild metric exhibits the relevant and typical structure that are believed to characterize the spacetime region exterior to a (non-rotating) gravitationally collapsing star, namely: *(i)* The onset of an event horizon, precluding to the external observer access to the information on what happens to the star once its surface crosses the horizon; and *(ii)* the development of a singularity (which remains invisible to the external observer) into which the star inevitably falls according to general relativity. The causal structure of a Schwarzschild black hole can be clearly seen in the diagram described in *Fig. 11*, where the nature of the event horizon associated with the black hole region is detailed. A basic role in this discussion about black holes is

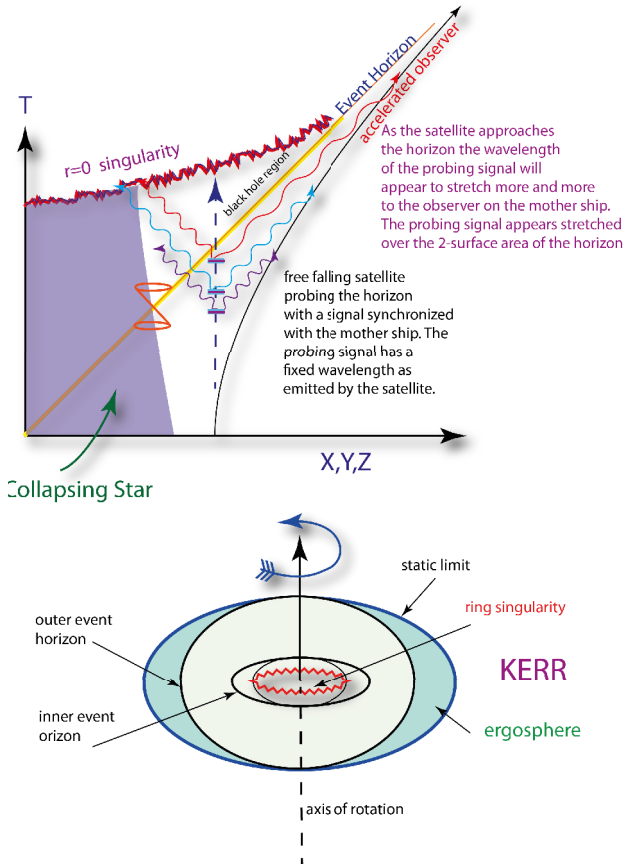


Fig. 11 – A description of the causal structure near the horizon of a Schwarzschild black hole (top) and a rotating Kerr black hole(bottom).

also played by the Kerr metric [7] (here in Boyer–Lindquist coordinates and $c = 1$)

$$g = -dt^2 + \frac{r^2 + a^2\cos^2\theta}{r^2 - 2GMr + a^2}\, dr^2 + \left(r^2 + a^2\cos^2\theta\right)\, d\theta^2$$

$$+ \left(r^2 + a^2\right)\, \sin^2\theta\, d\phi^2 + \frac{2GMr}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\left(a\sin^2\theta\, d\phi - \, dt^2\right) \, ,$$

which describes the vacuum spacetime associated to a rotating axially-symmetric black hole of mass M and angular momentum $J = M\,a$. Its causal structure is described, in a sketchy form, in *Fig. 11*. Besides the presence of inner singularities (with a structure different from the Schwarzschild singularity) and event horizons it is characterized by the presence of a spacetime region, the ergosphere, external to the black hole's (outer) event horizon, where no time-like observer could remain stationary. Roger Penrose [12] showed that particles within this ergosphere region could possess negative energy as measured by an observer at infinity. When these particles are captured by the horizon, we can extract energy and angular momentum from the rotating black hole, a possibility that played a basic role in the development of the circle of ideas leading to the Hawking radiation.

4. Singularities

The basic question around the nature of Schwarzschild and Kerr black holes concerned the possibility that the development of an event horizon and of the ensuing singularities was not a generic fact, to be expected in the physical evolution of a collapsing star, but rather the consequence of the particular properties of these very symmetrical solutions of the Einstein equations. This was not an academic question, since the development of singularities in spacetime implies a corresponding break down of the laws of physics, a basic issue in modern general relativity. The two physical situations where singularity of this type occur are the gravitational collapse of sufficiently massive stars and the big bang singularity in cosmology. The problem of the cosmological singularity marked Hawking's interest in the matter. Together with G. F. R. Ellis he discussed the development of singularities in homogeneous cosmological models [1], and together (1973) they wrote the wonderful *The large scale structure of Space-Time* [5], where they provide a detailed and still very actual description of the sophisticated global geometrical methods pioneered by them and Roger Penrose. This classic book marked also the birth of modern mathematical general relativity. A series of events, fostered by Dennis Sciama, led to a collaboration with R. Penrose [2]. Together, they were able to prove that a big bang singularity was also a feature not just of the standard highly symmetrical Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW) cosmological models, but also of more generic (not symmetric) model, a theorem generalizing Penrose's original results by showing that

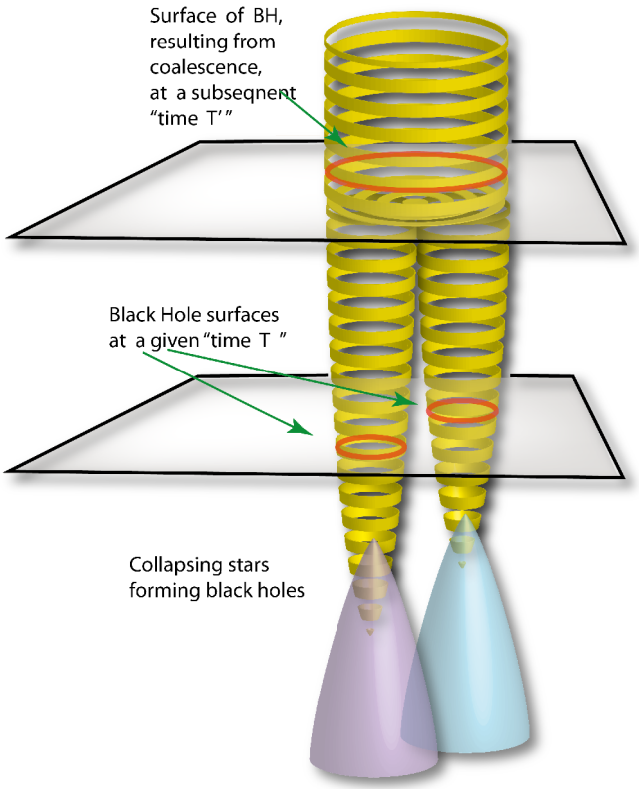


Fig. 12 — The dynamics of the event horizon resulting from the coalescence of two black holes.

a big-bang-type singularity was a necessary implication of general relativity. These years mark also Hawking's fundamental contribution [3] to a basic result of black hole theory according to which *(i)* The event horizon of a black hole has the topology of a sphere, *(ii)* The surface area of the future event horizon never decreases with time (*Fig. 12*). These properties suggested him a deep analogy between the behavior of black holes and the laws of thermodynamics: The surface area of the black hole horizon and its surface gravity were shown (in a foundational work [4] written in collaboration with B. Carter and J. Bardeen) to play a role analogous, respectively, to the role that entropy and temperature play in thermodynamics.

By deriving an expression for the mass of a stationary axisymmetric solution of the Einstein equations containing a black hole surrounded by matter and discussing aslo a formula for the difference in mass between two neighboring such solutions, they noticed that two black hole parameters, the area A of the event horizon and the surface gravity k of the black hole, have in their words *a close analogy with entropy and temperature respectively. This analogy suggests the formulation of four laws of black hole mechanics which correspond to and in some ways transcend the four laws of thermodynamics* (*Fig. 13*). In the notation associated with the Kerr metric (recall that the surface gravity of a black hole is, roughly speaking, the acceleration required (as measured from an asymptotically Minkowskian observer), for a test particle to stay still on the event horizon), we have

- 0th Law: the *surface gravity* of the (future) event horizon κ is constant
$$\kappa := \frac{\sqrt{G^2M^2 - a^2}}{2GM\left(GM + \sqrt{G^2M^2 - a^2}\right)}$$
- 1st Law: if a stationary black hole of mass M and angular momentum $J = Ma$ is perturbed to another stationary $BH(M + \delta M, J + \delta J)$ then
$$dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Omega_H \, dJ$$
where $\Omega_H = \frac{J}{2GM\left[GM^2 + \sqrt{G^2M^4 - J^2}\right]}$ is the black hole horizon angular velocity;
- 2nd Law: Hawking's area theorem holds: The surface area of the future event horizon never decreases with time.

This thermodynamic behavior of black holes seemed, at the time, just a curiosity and we let S. Hawking comment on this:
..But it was Jacob Bekenstein, who took the bold step, of suggesting the area actually was the physical entropy, and that it counted the internal states of the black hole. I was very much against this idea at first, because I felt it was a misuse of my horizon area result. If a black hole had a physical entropy, it would also have a physical temperature. If a black hole was in contact with thermal radiation, it would absorb some of the radiation, but it would not give off any radiation, since by definition, a black hole was a region from

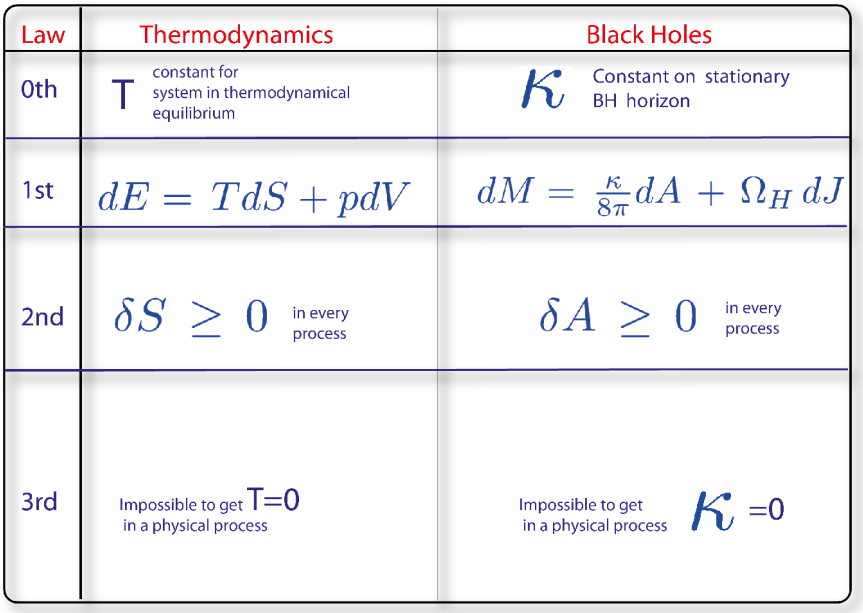


Fig. 13 — The correspondence between the laws of thermodynamics and the laws of black hole mechanics.

which nothing would escape. If thermal radiation was at a lower temperature than the black hole, the loss of entropy down the black hole, would be greater than the increase of horizon area. ... No one, including Bekenstein and myself, thought anything could get out of a non rotating black hole. On the other hand, Penrose had shown that energy could be extracted from a rotating black hole, by a classical process. This indicated that there should be a spontaneous emission in the super radiant modes, that would be the quantum counterpart of the Penrose process. In trying to understand this emission in the super radiant modes, in terms of quantum field theory in curved spacetimes, I stumbled across the fact that even non rotating black holes, would radiate. Moreover, the radiation would be exactly what was required, to prevent a violation of the second law. Bekenstein was right after all, but in a way he hadn't anticipated.

Hence, black hole physics connects Hawking's area theorem to the second

law of thermodynamics: $dS \geq 0$. A black hole with an event horizon of area A has an entropy given by

$$S_{BH} = \frac{k_B A}{4G\hbar} = \frac{k_B \pi R_0^2}{G\hbar} = \frac{k_B\, A}{4\, l_P^2} \ ,$$

where k_B is Boltzmann constant. By a sophisticated analysis of quantum fields on the curved spacetime associated to the black hole, Hawking was able to prove [6] that coherently with the thermodynamic behavior, a black hole emits a black body radiation at a temperature given by the celebrated formula

$$T_{BH} = \frac{\hbar}{8\pi G k_B M} \ .$$

A layman explanation of the general philosophy underlying this basic result can be at least qualitatively appreciated if we consider the interaction of the event horizon with a quantum field. As the field approaches the horizon its fluctuations (even the virtual ones), as seen by an asymptotic Schwarzschild observer, slow down more and more as the field approaches the horizon. In particular, short–lived virtual fluctuations are stretched over the full surface horizon area (*Fig. 14*) and become physical fluctuations since a virtual particle that exists for an arbitrarily long time ...is an ordinary particle! Hence, black holes are not so black and through their thermal emission they should evaporate at faster and faster rate. For this to happen for standard black holes you have to wait for eons! Some numerical figures may be of help,

$$\begin{aligned} T_{BH}(\text{few Sol M}) &\simeq 10^{-8} K \\ T_{BH}(\text{Moon}) &\simeq 10\, K \\ T_{BH}(\text{a boulder}) &\simeq 10^{18} K \\ T_{BH}(\text{M}_{Planck}) &\simeq 10^{32} K \end{aligned}$$

Hence, Hawking temperature is tiny for ordinary astrophysical masses, but it tends to grow exponentially as we consider black holes of smaller and smaller masses. Hawking speculated that tiny cosmological black holes should exists as remnants of the Big Bang and that they could be revealed through the energetic explosion resulting from their runaway evaporation. Alas, none has been revealed up to now! It is also worthwhile to stress that black hole entropy S_{BH} is proportional to the area A of the event horizon and not to the 3-dimensional volume V enclosed within

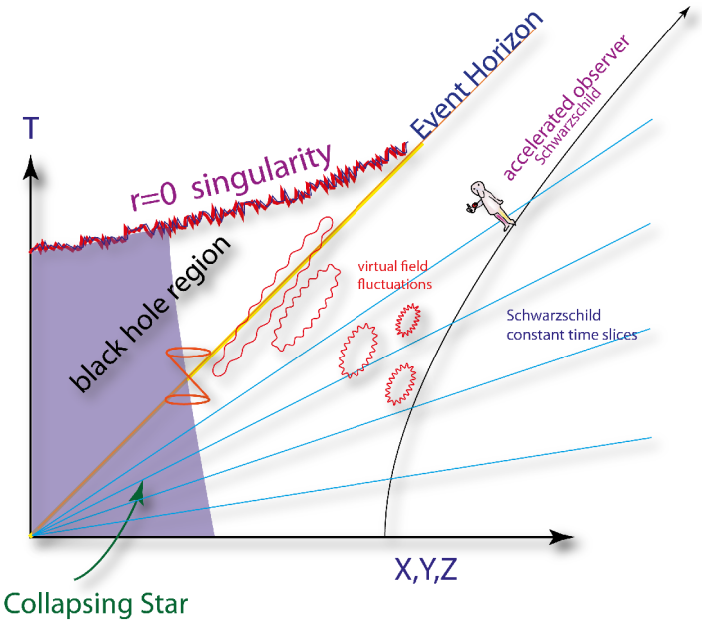


Fig. 14 — The behavior of quantum field fluctuations as they approach the horizon.

the (horizon) surface area A (*Fig. 15*). This is a basic feature of the thermodynamics of a system involving gravity. For a usual thermodynamical system associated to a local QFT, we have $S \propto V$. In particular, the number of QFT states with a maximum energy density ϵ_{max} that can be gathered in a $3d$ volume V typically is $N_{QFT} \propto \exp[s(\epsilon_{max})\, V]$, where $s(\epsilon_{max})$ is the entropy density as a function of the energy(density). Hence, S_{BH} is the maximum entropy of a region V of 3D space: an entropy that is proportional to the surface area measured in Planck units. The basic fact remains that S_{BH} is much larger than the physical (mass–energy) entropy of the collapsing star generating the black hole, and one is left with the very difficult question of understanding its physical origin. Are we touching here, with the interpretative physical problems raised by Hawking radiation, the boundary between general relativity and quantum theory? One may think that the Mathematical entropy of a BH is a measure of the potential capacity of the BH to store information, or that we need the powerful extension of quantum field theory provided

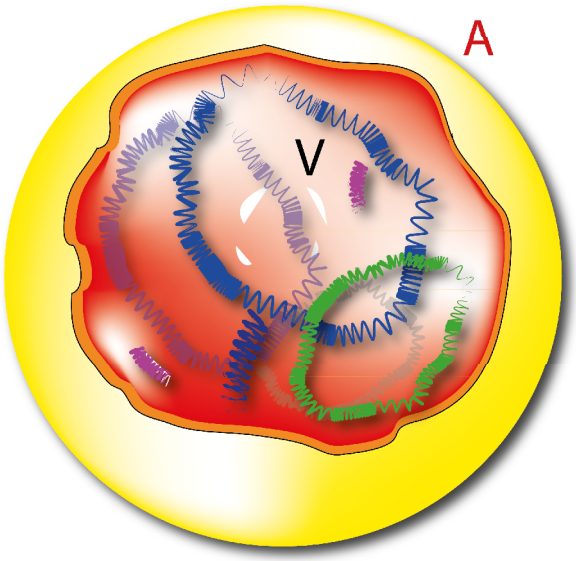


Fig. 15 — The black hole entropy S_{BH} is proportional to the surface area of the event horizon.

by string theory to address a state counting interpretation of S_{BH} (there have been indications in this direction) ... Still it is fair to say that we do not have a complete theory (and perhaps the right new ideas!) and Hawking radiation is challenging us, by offering a great opportunity to probe Gravity and the Quantum.

5. Mind over matter

Stephen Hawking was arguably one of the greatest relativist of the last fifty years. In this vastly incomplete note, a written report of my short address at the Istituto Lombardo to honor his memory, we just touched upon his many impressive, if not revolutionary, contributions to our understanding of General Relativity and of their impact on the physics of the Universe. He had a public, romanticised, image, in the words of his lifelong friend Roger Penrose, *the symbol of the triumph of mind over matter*. An image fully justified by the fact that, notwithstanding his physical condition, he was able to establish extraordinary representations of the

patterns of the world, which thrive on surprise and beauty.

REFERENCES

[1] S. W. Hawking, G. F. R. Ellis, *Singularities in homogeneous world models* Phys Lett 17, 246 (1965).

[2] S.W. Hawking, R. Penrose, *The Singularities of gravitational collapse and cosmology*, Proc.Roy.Soc.Lond.A A314 (1970) 529-548

[3] S. W. Hawking, *Black holes in general relativity*, Comm. in Math. Physics. 25 (2) : 152—166. (1972).

[4] J. M. Bardeen, B. Carter, S. W. Hawking, *The four laws of black hole mechanics*, Comm. Math. Physics volume 31, 161—170 (1973).

[5] S. W. Hawking, G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press, (1973).

[6] S. W. Hawking, *Black hole explosions?*, Nature, 248 (5443): 30—31, (1974).

[7] R.P. Kerr, *Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics*, Physical Review Letters 11, 237 (1963).

[8] Peter Simon, marquis de Laplace, as announced in *Exposition of the system of the World*, Part II, p. 305. Published proof in Allgemeine geographische Ephemeriden herausgegeben von F. von Zach. IV. Band, I. Stück, I. Abhandlung, Weimar (1799); translation in English: Hawking, Stephen W.; Ellis, George F.R. (1973). The Large Scale Structure of Space-Time. Cambridge University Press. pp. 365ff.

[9] J. Michell, *On the Means of Discovering the Distance, Magnitude, &c. of the Fixed Stars, inConsequence of the Diminution of the Velocity of Their Light, in Case Such a Diminution Should be Found to Take Place in any of Them, and Such Other Data Should be Procured from Observations, as Would be Farther Necessary for That Purpose. By the Rev. John Michell, B. D. F. R. S. In a Letter to Henry Cavendish, Esq. F. R. S. and A. S.*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol. 74 (1784), pp. 35-57 (Stable URL: http://www.jstor.org/stable/106576)

[10] J. R. Oppenheimer and H. Snyder, *On Continued Gravitational Contraction*, Phys. Rev. 56, 455 (1939),

[11] R. Penrose, *Gravitational collapse and space-time singularities* Phys. Rev. Lett. 14, 57 (1965).

[12] R. Penrose, *Gravitational Collapse: The Role of General Relativity* Nuovo Cimento Rivista Serie 1 (1969).

[13] K. Schwarzschild, *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie*, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften. 7: 189—196 (1916)

Scienze naturali
Ecologia

Istituto Lombardo (Rend. Scienze) 152, 95-112 (2018)

CAMBIAMENTI CLIMATICI: EVIDENZE SCIENTIFICHE, RISCHI ED OPPORTUNITÀ DI MITIGAZIONE

FILIPPO GIORGI (*)

Nota presentata dal m.e. C.E. Bottani
(Adunanza del 24 maggio 2018)

SUNTO. – Questo contributo presenta le molteplici evidenze che portano la comunità scientifica a concludere che il riscaldamento globale è in atto ed è dovuto per la maggior parte alle emissioni di gas serra, principalmente anidride carbonica e metano, derivanti dall'uso di combustibili fossili ed alcune pratiche agricole intensive. I principali cambiamenti climatici associati al riscaldamento globale sono poi discussi, insieme con gli scenari di clima futuro sviluppati con modelli climatici globali e gli impatti che i cambiamenti climatici possono avere su alcuni settori socioeconomici. Infine il contributo descrive le politiche di risposta al riscaldamento globale, ed in particolare i concetti di adattamento e mitigazione (riduzione delle emissioni di gas serra).

***

ABSTRACT. – This contribution presents the various pieces of evidence which bring the scientific community to conclude that global warming is happening and it is mostly due to anthropogenic emissions of greenhouse gases, mainly carbon dioxide and methane, deriving from the use of fossil fuels and some intensive agricultural practices. The main climatic changes associated with global warming are then discussed, along with the main model-derived future climate scenarios and the impacts that climate change can have on different socioeconomic sectors. Finally, the response policies to global warming are described, and in particular the concepts of adaptation and mitigaziotn (reduction of greenhouse gas emissions).

(*) Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, Trieste, Italy.
E-mail: giorgi@ictp.it

1. Introduzione

Dall'inizio dell'era industriale le attività umane hanno cominciato a modificare il pianeta Terra al punto tale che molti ritengono che siamo entrati in una nuova era che possiamo definire dell'Antropocene [1]. Attività come agricultura, urbanizzazione e deforestazione hanno modificato profondamente la superficie dei continenti, tanto che ormai sono molto limitate le aree del globo che possiamo veramente considerare allo stato "naturale". Ogni anno attività industriali, agricole, e domestiche immettono in atmosfera enormi quantità di agenti chimici, che portano alla produzione di sostanze dannose alla salute umana e agli ecosistemi, come l'ozono ed il particolato atmosferico. Immagini da satellite, per esempio, ci mostrano come aree quali l'Asia meridionale ed orientale siano avvolte quasi costantemente in una cappa di inquinamento. Un inquinamento che non risparmia neanche le aree più remote del globo, come l'Artico e l'Antartide, e tanto meno gli oceani, divenuti ormai il ricettacolo di enormi quantità di rifiuti prodotti dalle nostre aree agricole ed urbane.

Ma la manifestazione più impressionante dell'Antropocene è sicuramente il riscaldamento globale ed i cambiamenti climatici ad esso associati. Le crescenti emissioni di gas ad "effetto serra", o "gas serra" dovute ad attività umane hanno portato ad un aumento delle temperature globali superficiali di oltre un grado centigrado dall'inizio del 20mo secolo [2], un riscaldamento che, come vedremo, nel contesto degli ultimi 11,000 anni è di una rapidità assolutamente inaudita [3]. Questo sta portando a tutta una serie di modifiche del clima che, se dovessero continuare al ritmo attuale per le prossime decadi, avrebbero effetti sulla società che ne potrebbero mettere in pericolo lo sviluppo sostenibile. Nonostante le evidenze del riscaldamento globale e delle sue cause siano ormai schiaccianti, i governi sono ancora molto riluttanti ad implementare politiche efficaci tese a contrastare i cambiamenti climatici. Le cause di questa mancanza di azione sono di varia natura, ma è chiaro che un primo passo importante in questo contesto è la conoscenza di quello che oggi la scienza sa, e non sa, sul tema dei cambiamenti climatici.

Lo scopo di questo contributo è quindi quello di presentare e discutere in maniera sintetica, ma scientificamente rigorosa, le questioni fondamentali riguardanti il problema del riscaldamento globa-

le, dei cambiamenti climatici ad esso associati, degli effetti sulla società e delle politiche necessarie a contrastare questo fenomeno. Questo è fatto nella forma di risposte a quelle che sono le domande fondamentali su questo tema che emergono nel corso del dibattito sul riscaldamento globale. Le domande sono affrontate in maniera sequenziale nelle prossime sezioni di questo contributo perchè l'una scaturisce naturalmente dalla risposta a quella precedente.

Da notare che le tematiche di questo contributo sono trattate in maniera più estesa e comprensiva nel libro "L'Uomo e la Farfalla. Sei domande su cui Riflettere per Comprendere i Cambiamenti Climatici" edito dalla FrancoAngeli Editore, uscito nel 2018 [4]. Infine, i dati su cui è basata la discussione sono per lo più ottenuti dai rapporti redatti dall'Intergovernmental Panel on Climate Change nel corso delle ultime 3 decadi.

2. Il riscaldamento globale è in atto?

La domanda fondamentale sui cambiamenti climatici è se il riscaldamento globale sia effettivamente in atto. Questo tema è stato dibattuto per molti anni, ma ormai una molteplicità di evidenze prova in maniera categorica e condivisa all'interno della comunità scientifica che la risposta a questa domanda è affermativa. La prima evidenza è l'andamento della stima delle temperature globali in superficie, stima che viene ottenuta mettendo insieme ed omogeneizzando dati da decine di migliaia di stazioni meteo, navi, boe etc. Diversi laboratori nel mondo producono regolarmente queste stime di temperatura globale, ed una di queste (prodotta dalla NASA) è mostrata in *Fig. 1*. Anche se esistono delle piccole differenze fra le stime prodotte da diversi gruppi di ricerca, tutte concordano nel rilevare che dall'inizio del 20mo secolo la temperatura media globale superficiale è aumentata di poco più di 1°C, e che l'ultima decade è stata di gran lunga la più calda negli ultimi 120 anni. È importante notare in *Fig. 1* che esistono delle oscillazioni nella temparatura globale, sia da un anno all'altro che da una decade all'altra, sovrapposte al trend di riscaldamento. Queste sono dovute alla variabilità naturale del sistema climatico, che è un sistema complesso e non-lineare caratterizzato da un comportamento di tipo caotico.

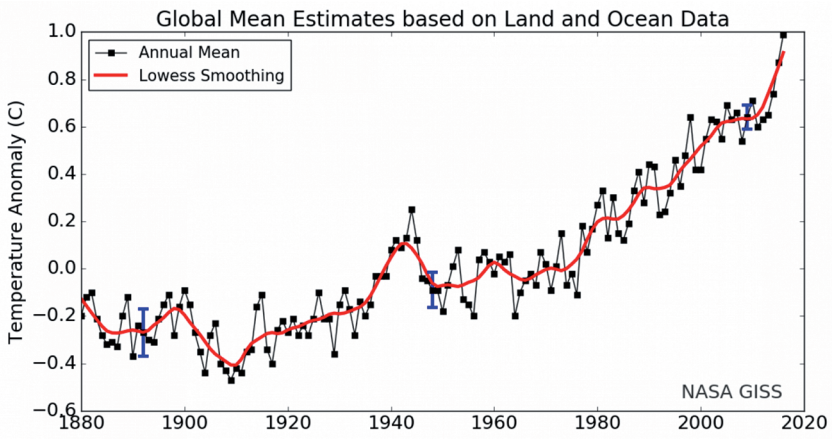


Fig. 1. Anomalie annuali di temperatura superficiale globale (rispetto al periodo di riferimento 1940-1970) dal 1880 al 2016. La curva indica una media corrente di 5 anni. Le tre piccole barre verticali indicano l'incertezza sulla stima delle medie in diversi periodi del record storico. (Cortesia della NASA-GISS).

Una seconda evidenza del riscaldamento globale è la fusione dei ghiacciai continentali, che sta avvenendo nella maggior parte dei ghiacciai del pianeta [5]. Per esempio, il monitoraggio dei ghiacciai Alpini mostra che tutti questi sono in fase di recessione. Particolamente preoccupante è poi la fusione dei ghiacci della Groenlandia, che sta avvenendo a ritmi molto maggiori di quelli stimati dai modelli glaciologici, probabilmente a causa di un effetto di scurimento dei ghiacci da parte del particolato atmosferico proveniente da Europa, America ed Asia [6]. Non solo i ghiacci continentali stanno fondendo, ma anche i ghiacci marini dell'Artico. Immagini da satellite mostrano in maniera impressionante come a fine estate (il periodo di minore copertura di ghiacci artici) negli anni 80 quasi l'intera calotta Artica era coperta di ghiacci, mentre già dagli ultimi anni circa la metà della calotta Artica rimane scoperta, e molti prevedono che fra qualche decade avremo un Artico senza ghiacci a fine estate. In Antartide le temperature sono troppo basse per causare la fusione dei ghiacci sul continente, però un altro preoccupante fenomeno è in atto. Le zone costiere dell'Antartide Occidentale sono caratterizzate dalla presenza di enormi lingue di ghiaccio che si estendono dalle coste sull'oceano (chiamate in inglese "ice -shelves"). Nelle ultime decadi diverse di queste ice-shelves, di estensione pari a migliaia di km^2 si sono sgretolate con eventi della

durata di poche settimane, per esempio nel Febbraio del 2002 [7], riversando nel mare un enorme numero di icebergs. Il motivo principale è il riscaldamento delle acque oceaniche sottostanti le ice-shelves, che ne indebolisce la struttura. Infatti, dati da navi e boe, in particolare la densa rete di boe ARGO attiva dagli anni 2000, mostrano come anche gli oceani si stiano riscaldando, almeno fino ad una profondità di 2000 m (un'altra evidenza del riscaldamento globale) [8].

L'acqua proveniente dalla fusione dei ghiacci continentali e l'espansione termica degli oceani sono alla base di una ulteriore evidenza del riscaldamento globale, e cioè l'innalzamento del livello del mare. Osservazioni basate sia da rilevamenti costieri che, più recentemente, da dati da satellite (come il TOPEX-POSEIDON), mostrano che il livello del mare globale è aumentato di circa 25 cm negli ultimi 120 anni [8]. Il contributo maggiore a questo innalzamento è dato dalla fusione dei ghiacci continentali, ma il contributo che sta crescendo alla maggiore velocità è quello della fusione dei ghiacci della Groenlandia.

Infine, un'ultima evidenza è l'aumento delle temperature in troposfera, i primi ~15 km dell'atmosfera terrestre. Le temperature troposferiche possono essere misurate o da palloni sonda o da dati da satellite inseriti in modelli di trasporto radiativo. Mentre le prime stime da dati satellitari fatte negli anni 2000 non sembravano mostrare un riscaldamento, una migliore calibrazione di questi dati in studi più recenti mostra un riscaldamento pienamente in linea con quello superficiale [9].

Tutte le evidenze descritte in questa sezione hanno quindi portato la comunità scientifica a dichiarare che il riscaldamento globale in atto è inequivocabile [2].

3. Cosa sta causando il riscaldamento globale?

Avendo stabilito che siamo in un trend di riscaldamento globale, la domanda che ne segue è cosa lo stia causando. Il clima della Terra può variare per tre tipi di cause: l'effetto di forzanti esterni naturali; l'effetto di forzanti esterni derivanti da attività umane (o forzanti antropici); e la variabilità naturale del sistema climatico.

Un tipico esempio della prima categoria è quello dei cosidetti cicli di Milankovic. Nel corso dell'ultimo milione di anni c'è stato un alternarsi abbastanza regolare di periodi glaciali ed interglaciali con periodi varianti dai ~120,000 ai ~20,000 anni. L'ultimo picco glaciale è occorso

circa 21,000 anni fa, quando le temperature hanno cominciato lentamente a risalire fino a raggiungere il picco interglaciale caldo circa 10,000 anni fa. Le temperature globali sono state poi stabili per circa 5000 anni, quando è cominciata la discesa molto lenta verso il prossimo periodo glaciale, che normalmente dovrebbe essere raggiunto fra qualche decina di migliaia di anni. Il forzante esterno naturale che determina questi cicli è la variazione regolare di alcune caratteristiche dell'orbita terrestre, come l'eccentricità dell'orbita, l'inclinazione dell'asse terrestre e la precessione dell'orbita. Queste variazioni però hanno luogo su scale temporali di decine di migliaia di anni e quindi non sono rilevanti per il nostro problema dei cambiamenti climatici su scale che vanno da alcune decine a centinaia di anni. A queste scale i forzanti esterni più importanti sono le variazioni interdecadali della intensità della radiazione solare e l'effetto di grandi eruzioni vulcaniche che immettono nell'alta atmosfera enormi quantità di particolato atmosferico, dove il particolato può risiedere anche per anni e influenzare il budget energetico dell'atmosfera con la riflessione e assorbimento della radiazione solare.

Il forzante antropico più importante è legato all'effetto dei cosidetti gas serra. Questi hanno la proprietà di assorbire parte della radiazione infrarossa emessa dalla superficie terrestre e riemetterla in tutte le direzioni, quindi verso lo spazio ma anche verso la superficies stessa, intrappolando quindi parte di questa energia e riscaldando la superficie e la bassa atmosfera. I più importanti gas serra di origine antropica sono l'anidride carbonica (CO2), che è principalmente un prodotto della combustione, ed il metano (CH4), che è un prodotto della digestione. Prima dell'inizio dell'era industriale (metà del 19mo secolo) le concentrazioni atmosferiche di CO2, determinate da un equilibrio fra fotosintesi e respirazione della biosfera e scambi fra atmosfera e oceano, erano molto stabili, attorno alle 270-280 ppm (parti per milione). Da allora a causa di un uso sempre crescente di combustibili fossili (petrolio, carbone e gas naturale) sono aumentate a valori di circa 410 ppm, un aumento di circa 45% in 150 anni cioè di una velocità tale che il pianeta non ha mai visto nel corso dell'ultimo milione di anni [2]. Anche le concentrazioni di CH4 sono state relativamente costanti nel corso degli ultimi 10,000 anni, circa 750 ppb (parti per miliardo), ma sono cresciute velocemente soprattutto dalla metà del ventesimo secolo per lo più a causa dello svilupparsi di allevamenti intensivi, fino a raggiungere concentrazioni di 1700-1800 ppb, quindi più che raddoppiate in cento anni, anche questo un andamento di velocità inedita nell'ultimo milione di anni. L'aumento rapido delle concentrazioni di que-

sti gas serra dovrebbe quindi portare ad un aumento dell'effetto serra descritto sopra, e quindi ad un riscaldamento del clima.

Il terzo fattore è quello della variabilità naturale del sistema climatico, che è un sistema complesso con carattere caotico e quindi caratterizzato da una sua variabilità interna. Quindi, in linea di principio, il riscaldamento osservato potrebbe essere il semplice risultato di una variazione interna del sistema climatico.

Come si fa a determinare quale di questi tre fattori sta causando il riscaldamento globale? L'effetto dei forzanti naturali ed antropici può essere valutato inserendo la variazione di questi forzanti nei modelli climatici ed andando a studiare quale di questi forzanti consente ai modelli di riprodurre il riscaldamento in atto. Da specificare che i modelli climatici sono essenzialmente delle descrizioni matematiche dei processi che determinano l'evoluzione del clima, e informazioni di base sui questi modelli possono essere trovate, per esempio, in [10],[11]. Questo esercizio modellistico è stato fatto da decine di laboratori nel mondo ed ha dimostrato in maniera chiara che l'unico modo di spiegare il riscaldamento osservato dalla metà del 20mo secolo è di introdurre nei modelli l'aumento dei gas serra di origine antropica [12]. Questo perchè, essenzialmente, negli ultimi 50 anni l'intensità della radiazione solare è stata abbastanza costante e quindi non può spiegare il riscaldamento. In più l'effetto delle grandi eruzioni vulcaniche è di raffreddare il clima più che riscaldarlo, a causa della riflessione della luce solare da parte del particolato atmosferico. Questi esperimenti hanno quindi eliminato uno dei possibili fattori causa del riscaldamento, e cioè quello dei forzanti esterni naturali.

Benchè l'aumento delle concentrazioni di gas serra di origine antropica può spiegare il riscaldamento osservato, rimane sempre in piedi l'ipotesi di una variazione naturale del clima. Per valutare questa ipotesi si può confrontare l'andamento delle temperature attuali con quelle dell'ultimo periodo caldo interglaciale (ultimi 11,300 ani), che chiamiamo Olocene. Questo confronto è riportato in *Fig. 2*, che presenta la ricostruzione più accurata diponibile delle temperature globali durante l'Olocene, ricostruzione che viene fatta sulla base di diversi indicatori, come le analisi di carotaggi di ghiaccio in varie zone del globo, sedimenti marini e lacustri, etc. [3]. La *Fig. 2* ci mostra chiaramente come l'aumento della temperatura globale nell'ultimo secolo sia estremamente anomalo (e quindi improbabile) rispetto a quanto accaduto negli ultimi 11,300 anni e che quindi questo aumento sia difficilmente spiegabile come una fluttuazione naturale del clima.

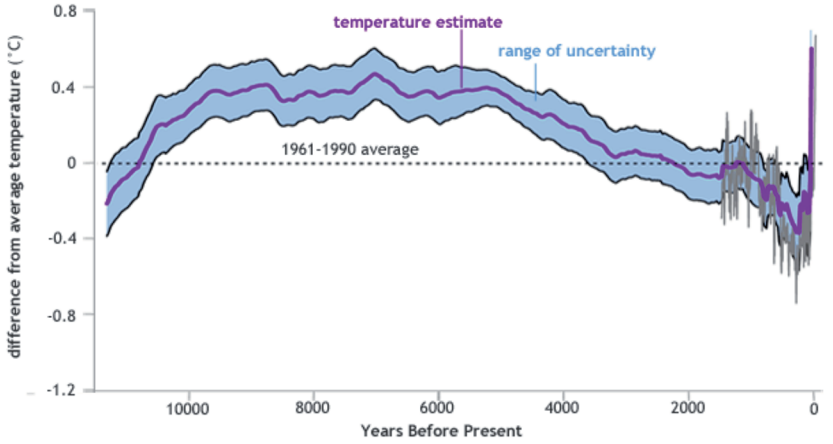


Fig. 2. Stime delle anomalie di temperatura globale superficiale (rispetto alla media di riferimento 1961-1990) nell'Olocene (ultimi 11300 anni). La curva centrale indica il valore medio della stima e le curve che delimitano la zona grigia l'intervallo di incertezza su queste stime (Cortesia della NOAA, dati da [3])

Tutte queste considerazioni hanno portato la comunità scientifica a concludere con un alto grado di certezza (95%) che la maggior aprte del riscaldamento osservato soprattutto dalla seconda metà del 20mo secolo è dovuto all'aumento delle concentrazioni di gas serra di origine antropica [2].

4. Cosa possiamo aspettarci per il futuro ?

Se i gas serra di origine antropica hanno un effetto così importante sul clima globale, cosa possiamo aspettarci per il futuro? Previsioni esatte su come possa cambiare il clima nel 21mo secolo non sono possibili, sia per la natura caotica del sistema climatico che per la impredicibilità delle emissioni future di gas serra, che dipendono dallo sviluppo socioeconomico della società. Quello che si può fare però, è di costruire delle ipotesi, o scenari, plausibili di sviluppo socioeconomico, e quindi di emissioni e concentrazioni di gas serra, e di immettere questi scenari nei modelli climatici. I modelli possono quindi essere usati per simulare la risposta del sistema climatico nel tempo a questi scenari di concentrazioni di gas serra, producendo quindi scenari di cambiamento climatico futuro.

La comunità scientifica ha elaborato una serie di scenari di concentrazioni di gas serra per il 21mo secolo e di relativa risposta del sistema climatico. La *Fig. 3* mostra l'aumento di temperatura globale fino al 2100 associato a due scenari particolari, RCP2.6 and RCP8.5 [2]. Nel RCP2.6, le temperature globali si stabilizzano attorno a 1°C in più delle temperature attuali, e quindi circa 2°C maggiori di quelle pre-industriali. Questo scenario quindi corrisponde approssimativamente all'obiettivo identificato nel'accordo di Parigi del 2015. Lo scenario RCP8.5, spesso chiamato il "business as usual", è il più estremo, e corrisponde ad uno scenario in cui l'uso di combustibili fossili continui ad aumentare al ritmo attuale. In questo caso i modelli climatici prevedono un riscaldamento globale fino a 4-5°C rispetto alle temperature attuali. Se poniamo questo valore nel contesto dell'andamento delle temperature mostrato in *Fig. 2* ci possiamo rendere conto che un riscaldamento di 4-5 gradi in cento anni è un valore assolutamente enorme, di entità mai vista nella storia recente del pianeta, e le cui conseguenze, per un sistema complesso come quello del pianeta terra, sono molto difficili da valutare, ma porterebbero sicuramente ad uno sconvolgimento del sistema climatico presente.

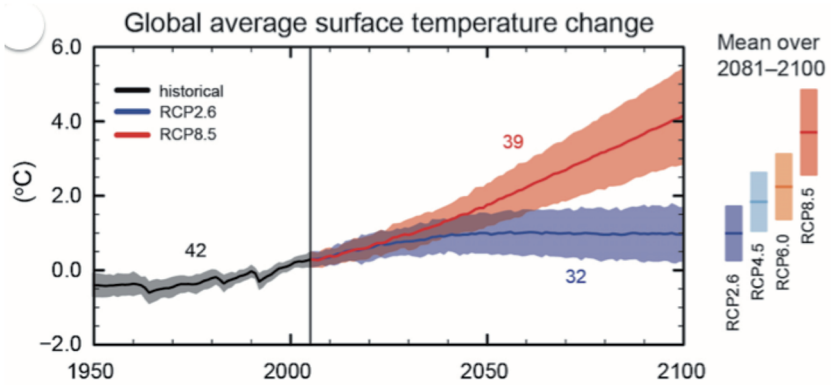


Fig. 3. Cambiamento di temperatura superficiale globale rispetto alla media per il 1986-2005 come simulato da proiezioni con modelli climatici globali per gli scenari RCP8.5 ("Business as usual") e RCP2.6 ("Accordo di Parigi") . Il numero per ogni curva indica il numero di modelli climatici utilizzati, la zona ombreggiata indica lo spread dei risultati dei modelli e la curva al centro di questa zona indica il valore medio. A lato sono anche riportati i valori di riscaldamento globale per il periodo 2081-2100 (media e spread dei modelli), includendo anche gli scenari intermedi RCP4.5 ed RCP6.0 (Cortesia dell'IPCC; Figura SPM.7, pannello (a, referenza [2])

Con questa premessa, è però utile identificare alcuni dei cambiamenti climatici associati al riscaldamento globale mostrato dalle *Figg. 1-*

3. Il primo è il fatto che la risposta al riscaldamento globale non è uniforme attraverso il globo, ma alcune zone sono molto più sensibili di altre, e per questo vengono spesso chiamate "Hot-spots" (o zone calde [13]). La zona calda per eccellenza è l'Artico, dove le temperature stanno crescendo ad una velocità più che doppia di quella della media globale [7]. Questo è dovuto soprattutto allo scioglimento dei ghiacci, che diminuisce la riflettività della superficie, aumenta l'assorbimento della radiazione solare e quindi amplifica il riscaldamento. Altre zone calde sono legate alle modifiche della circolazione generale amosferica innescate dal riscaldamento globale. Una di queste consiste nello spostamento verso i poli delle traiettorie principali delle perturbazioni, cosa che produce un aumento di precipitazioni a medie e alte latitudini, dove già adesso le precipitazioni sono abbondanti, ed una diminuzione nelle zone sub-tropicali oggi già più secche. In particolare, a causa di questo fenomeno, che è peraltro già in atto, nell'area del Mediterraneo si prevede un clima molto più secco e caldo di quello odierno, il che fa del Mediterraneo un'altra delle principali zone calde del pianeta [14]. L'importanza della presenza di Hot-spots climatiche deriva dal fatto che se queste si trovano in aree con paesi particolarmente poveri, e quindi vulnerabili, possono potenzialmente creare un problema di migrazioni di massa dei cosidetti "migranti climatici" in cerca di nicchie ambientali migliori in cui vivere.

Una seconda importante risposta del clima al riscaldamento globale è la cosidetta "intensificazione del ciclo idrologico" [15]. Una atmosfera più calda è anche più energetica, e per la legge di Clausius-Clapeyron, può contenere più vapor d'acqua. In queste condizioni, quando si innesca un fenomeno piovoso tenderà a piovere più intensamente. Al tempo stesso i modelli ci dicono che occorre un tempo maggiore per raggiungere le condizioni di pioggia, cioè che si allungano i periodi secchi fra un evento piovoso e l'altro. In altre parole, in un atmosfera più calda piove meno frequentemente ma più intensamente. Questo fenomeno quindi risulta in un maggiore rischio che abbiano luogo eventi estremi sia di carattere alluvionale che siccitoso. In aggiunta, il riscaldamento globale aumenta anche la frequenza ed intensità di ondate di calore. L'aumento di eventi meteoclimatici estremi è in corso in molte aree del globo, e per esempio dati delle compagnie di assicurazione mostrano come il numero di eventi meteoclimatici definiti come catastrofali sia aumentato da circa 200 all'anno negli anni ottanta a circa 800 all'anno negli ultimi anni, cioè un aumento di un fattore 4 in circa 40 anni.

La fusione dei ghiacci continentali e l'innalzamento del livello marino che ne risulta sono fra i temi più importanti nell'ambito delle problematiche legate ai cambiamenti climatici. Per lo scenario business as usual si prevede che molti ghiacciai possano diminuire notevolmente di massa o addirittura scomparire, come nel caso dei ghiacciai Alpini [8]. Se da un lato questo avrebbe impatti molto deleteri sugli ecosistemi montani, dall'altro costituirebbe anche una forte riduzione della disponibilità di acqua dolce per usi agricoli, industriali e domestici, dato che i ghiacciai oggi contengono circa il 65% dell'acqua dolce disponibile sul pianeta. Basti pensare all'importanza dei ghiacci dell'Imalaya, le cosidette Torri D'acqua Asiatiche, che sono vitali per miliardi di persone in Asia meridionale e orientale.

Riguardo l'innalzamento del livello del mare, i modelli finora prevedono fino ad un ulteriore metro per gli scenari più estremi [2]. Questa stima però è destinata a salire soprattutto perchè i ghiacci della Groenlandia stanno fondendo ad una velocità molto maggiore di quella prevista fino ad ora, probabilmente a causa dello scurimento dei ghiacci (e quindi aumento dell'assorbimento di luce solare) causato dall'inquinamento prodotto in Europa, Nord America ed Asia [6]. L'innalzamento del livello del mare ha molte conseguenze sugli ambienti naturali ed urbani costieri, come erosione delle coste, maggior frequenza ad intensità di alluvioni costieri e mareggiate, intrusione di acqua salina nel suolo. Se consideriamo che una grande porzione della popolazione mondiale vive in ambienti costieri, soprattutto in grandi megalopoli di paesi relativamente poveri, e quindi in condizioni spesso degradate, ci rendiamo conto di come questo problema sia uno dei più importanti in termini di impatti socioeconomici.

Chiaramente, tutti gli effetti climatici del riscaldamento globale menzionati fino ad ora, insieme ad altri come l'aumento della variabilità interannuale, hanno impatti su molteplici settori di importanza per la società, per esempio salute, trasporti, turismo, agricoltura, gestione delle risorse idriche, biodiversità, inquinamento di aria e acqua, e così via. Ognuno di questi richiederebbe un trattamento separato ben al di là degli scopi di questo contributo. È importante però menzionare il problema dei cosidetti "punti di non ritorno", o "tipping points" [16]. Questi sono processi i quali, una volta innescati e superata una certa soglia, avrebbero un carattere sostanzialmente semi-irreversibile, almeno su scale temporali di interesse alla società umana, e porterebbero a mutamenti molto profondi del sistema climatico.

La comunità scientifica si è soffermata soprattutto su tre di questi "tipping points" [2]. Il primo è lo scioglimento dei ghiacci della Groenlandia, di cui abbiamo già parlato. È stato valutato che se l'intera copertura dei ghiacci della Groenlandia fondesse, questo porterebbe ad un aumento del livello del mare globale di superiore ai 7 metri, con conseguenze la cui gravità è facilmente immaginabile. Il secondo tipping point è il cosidetto collasso della circolazione globale oceanica termoclina. Gli oceani del globo sono collegati fra loro da una circolazione profonda che viene sostanzialmente sostenuta dalla formazione di acque molto dense e fredde nel nord Atlantico, come risultato della formazione dei ghiacci artici. Questa circolazione per esempio porta alla formazione della Corrente del Golfo, che mantiene il clima dell'Europa relativamente mite. Un riscaldamento globale che riducesse o addirittura eliminasse la formazione dei ghiacci Artici potrebbe indebolire notevolemnte questa circolazione fino al punto da farla interamente collassare, e questo porterebbe ad uno sconvolgimento generale della circolazione oceanica ed atmosferica globale. Il terzo tipping point è la scomparsa della foresta Amazzonica, legata al fatto che i modelli predicono una forte riduzione delle precipitazione nel bacino dell'Amazzonia. Questo ovviamente porterebbe anche ad enormi modifiche del sistema climatico. Fortunatamente nessun modello predice che questi tipping points siano stati già raggiunti, o vengano raggiunti nel corso del 21mo secolo, anche negli scenari più estremi. Questo però potrebbe accadere nel corso di qualche centinaio di anni nel caso di un riscaldamento sostenuto di diversi gradi. A quel punto, il clima del pianeta, e quindi il pianeta stesso, sarebbe molto diverso da come è ora.

È chiaro dagli esempi riportati in questa sezione che il riscaldamento globale potrebbe potenzialmente portare a sconvolgimenti tali del sistema climatico da mettere a repentaglio lo sviluppo sistenibile della società umana, almeno come adesso la conosciamo. Questo però può essere evitato con delle politiche efficaci di cosidetta mitigazione e adattamento, che sono l'oggetto della prossima sezione di questo contributo.

6. Cosa si può fare per affrontare il problema dei cambiamenti climatici?

Nell'accordo di Parigi del 2015 si è stipulato che politiche debbano essere intraprese dai governi del mondo per limitare il riscaldamento

globale al di sotto della soglia di 2 ºC rispetto ai valori pre-industriali, e quindi poco meno di 1 ºC rispetto ai valori attuali. Questa soglia dei 2 ºC è stata individuata come cosidetta "soglia di pericolo", al di là della quale i danni provocati dai cambiamenti climatici sarebbero difficilmente gestibili anche con delle efficaci politiche di adattamento, e quindi sarebbero inaccettabii per la società. Per stabilizzare le temperature globali al di sotto di questa soglia di pericolo occorre stabilizzare le concentrazioni di gas serra a valori di equivalente CO2 attorno alle 450 ppm (quindi non lontani da quelli attuali), e questo richiede una diminuzione delle emissioni, perchè i processi di rimozione dei gas serra non sono sufficienti oggi a controbilanciare le emissioni correnti. A queso processo di riduzione delle emissioni si dà il nome di "mitigazione". Nello specifico, per ottenere l'obiettivo dell'accordo di Parigi si dovrebbero ridurre le emissioni di circa 75-80% rispetto ai valori attuali entro il 2050 e raggiungere la neutralità di flussi di carbonio in atmosfera entro il 2100.

Dunque, anche nel caso si ottenesse l'obiettivo dell'accordo di Parigi, dovremmo aspettarci un ulteriore livello di riscaldamento globale ed associati cambiamenti climatici, i cui impatti devono essere gestiti attraverso delle politiche di cosidetto "adattamento". Un esempio tipico di adattamento è la costruzione di barriere costiere più alte in risposta all'aumento del livello del mare. Un altro è l'implementazione di modifiche nella gestione delle risorse idriche o nella pianificazione territoriale in relazione a modifiche del ciclo idrologico terrestre. L'adattamento è una forma di risposta al riscaldamento globale di carattere locale, perchè dipende dagli impatti che i cambiamenti climatici hanno sulle diverse realtà territoriali.

La mitigazione invece ha un carattere globale. CO2 e CH4 hanno un tempo di vita molto lungo in atmosfera, dai 50 ai 100 anni, e quindi sono ben mescolati nel globo. Questo vuol dire che non basta che sia un paese ad implementare politiche efficaci di mitigazione, ma devono contribuire tutti i paesi del mondo. Come abbiamo visto, la sorgente antropica principale di CO2 è l'uso di combustibili fossili, che oggi copre circa l'80% del fabbisogno energetico globale. Quindi, essenzialmente, il problema della mitigazione per il CO2 è un problema di decarbonizzazione del sistema energetico. Un primo fondamentale passo in questo contesto è quello di un aumento dell'efficienza energetica. Oggi globalmente si spreca circa il 60-65% dell'energia prodotta, al momento della produzione, trasporto e uso di questa energia. Quindi

una maggiore efficienza energetica darebbe già un contributo fondamentale alla riduzione delle emissioni. Un modo per aumentare questa efficienza è quello di riconvertire sistemi oggi basati per lo più su motori termici (trasporto, riscaldamento, industria) in sistemi elettrici, perchè questi ultimi hanno un rendimento molto maggiore.

Questa elettrificazione però deve essere supportata da una produzione di energia elettrica basata su fonti alternative. A questo riguardo, fonti rinnovabili, come idroelettrico, geotermico, eolico, solare, biomasse e, di recente sviluppo, onde marine, offrono una alternativa ai combustibili fossili sempre più conveniente, sia dal punto di vista economico che ambientale. Per esempio, un indicatore tipico usato per misurare la convenienza di una forma di energia è l'EROEI (Energy return ver Energy Invested), che misura il rapporto fra energia prodotta da una certa sorgente e quella spesa per produrla. Quindi maggiore è l'EROEI più conveniente è una forma di energia. L'EROEI oggi è dello stesso ordine, se non maggiore, per molte forme di energia rinnovabile che per le fonti fossili [17], e mentre l'EROEI per le rinnovabili cresce con il migliorare delle tecnologie, quello delle fonti fossili diminuisce per le maggiori difficoltà di estrarre e raffinare i combustibili. Altri meccanismi di mitigazione includono la riduzione di allevamenti intensivi, che sono la maggiore fonte di CH4 di origine antropica, e la riduzione della deforestazione, che oggi contribuisce per circa 10% di emissoni equivalenti di CO2, con eventuale inizio di riforestazione a livello globale.

Considerazioni conclusive

In questo contributo abbiamo esaminato i punti principali riguardanti il riscaldamento globale. Abbiamo visto come l'evidenza è ormai conclusiva che siamo in un trend di riscaldamento globale (poco più di 1 ^{o}C dall'inizio del 20mo secolo) e che questo è dovuto con un alto livello di certezza (>95%) alle emissioni di gas serra di origine antropica, in particolare l'uso di combustibili fossili per la CO2 ed alcune pratiche agricole per il CH4. Abbiamo altresì visto che un aumento di temperatura globale di 1^{o}C in 120 anni è di una rapidità tale che non è mai occorsa almeno negli ultimi 11,300 anni, ed è quindi un evento molto anomalo per il pianeta. Proiezioni per il 21mo secolo producono una

forchetta che va da un ulteriore grado di riscaldamento entro il 2100 nello scenario meno impattante a 4-5 ºC per il più estremo, il che produrrebbe un vero sconvolgimento nel sistema climatico del pianeta.

Fra i cambiamenti climatici legati al riscaldamento globale abbiamo messo in evidenza la presenza di zone climatiche particolarmente sensibili (hotspots), come l'Artico, il Mediterraneo ed il bacino dell'Amazzonia; l'intensificazione del ciclo idrologico con conseguente aumento di frequenza ed intensità di eventi meteoclimatici estremi; la riduzione dei ghiacciai, con conseguente perdità di risorse idriche usufruibili; l'aumento del livello del mare, con conseguente danneggiamento, o addirittura scomparsa, di aree costiere. Ovviamente però molti altri elementi del sistema climatico ed importanti settori socioeconomici sarebbero influenzati, come la biodiversità, l'agricoltura, l'inquinamento, il turismo e così via.

Infine abbiamo dato alcuni esempi di politiche di adattamento e di strategie di mitigazione necessari a contrastare il riscaldamento globale. Fra queste ultime, in particolare, la conversione da un sistema energetico prevalentemente basato sull'uso di combustili fossili ad uno in cui l'efficienza energetica sia maggiormente curata, per esempio tramite l'elettrificazione di settori come i trasporti, il riscaldamento e l'industria, e l'energia elettrica sia prodotta attraverso fonti rinnovabili che stanno diventando sempre più competitive.

Chiaramente esistono ancora molte aree che necessitano di maggiore ricerca. Nell'ambito degli aspetti fisici del problema, I modelli climatici devono essere migliorati, soprattutto nella loro rappresentazione di processi legati a nubi e precipitazione, per aumentare l'affidabilità e diminuire le incertezze delle simulazioni di clima futuro. Questo necessita anche di migliori osservazioni per validare i modelli. Le simulazioni di cambiamento climatico a livello locale e regionale sono ancora caratterizzate da un alto grado di incertezza, anche per la bassa risoluzione dei modelli climatici globali che non consente di rappresentare adeguatamente processi a scale regionali e locali. Diverse tecniche sono state sviluppate per migliorare questo aspetto della modellistica, come l'uso di modelli regionali ad alta risoluzione [18] o di tecniche di downscaling statistico [19], ma sicuramente occorre molta ricerca in questo campo. La rappresentazione delle interazioni fra biosfera, sia continentale che marina, e le altre componenti del sistema climatico deve anche essere migliorata, data la sua importanza nel determinare una serie di feedbacks che possono marcatamente amplificare il riscaldamento glo-

bale. Ed infine, menzionerei la criosfera, la cui risposta al riscaldamento globale è fondamentale nel determinare l'entità e gli effetti dei cambiamenti climatici e per cui alcuni processi sono ancora non chiari (come lo scioglimento veloce dei ghiacci della Groenlandia).

A dispetto di queste incertezze, è chiaro sulla base della ricerca scientifica condotta nelle ultime 3 decadi, che quello del riscaldamento globale è un problema fondamentale per lo sviluppo sostenibile della società umana come oggi la conosciamo. È un problema però che può essere affrontato e tenuto sotto controllo con delle appropriate strategie di mitigazione. Purtroppo ad oggi le negoziazioni internazionali su queste strategie hanno fallito nel produrre accordi vincolanti, dato che l'accordo di Parigi, per quanto importante nello stabilire un obiettivo preciso, non è appunto legalmente vincolante. Esiste un forte elemento di urgenza nell'implementazione di strategie di mitigazione, perchè le azioni intraprese ora avranno effetti sul pianeta per decadi a venire dato il lungo tempo di permanenza dei gas serra in atmosfera e data l'inerzia di alcune componenti del sistema climatico (e.g. gli oceani). È quindi necessario che una forte spinta dal basso, dalla società civile, riesca a dare l'impeto necessario per implementare azioni tempestive ed efficaci per contrastare il riscaldamento globale.

REFERENCES

[1] Crutzen PJ, The Anthropocene, *Earth System Science in the Anthropocene*, 2006: 13-18.

[2] IPCC 2013. Climate Change 2013: *The Physical Science Basis.* Contribution of Working Group I to the Fifth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change [Stocker TF, et al., Eds.], Cambridge University press, Cambridge, UK, 2013.

[3] Marcott SA, Shakun JD, Clark PU, Mix AC, A reconstruction of regional and global temperature for the past 11,300 years, *Science*, 339: 1198-1201.

[4] Giorgi F, L'Uomo e la Farfalla. Sei domande su cui riflettere per comprendere i cambiamenti climatici, FrancoAngeli Ed., 2018, 148pp.

[5] Vaughn DG, Comiso JC, et al. , Observation: Cryosphere, in Climate Change 2013: The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Fifth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change [Stocker TF, et al., Eds.], Cambridge University press, Cambridge, UK, 2013, 317-382.

[6] Chen JL, Wilson CL, Tapley BD, Satellite gravity measurements confirm accelerated melting of Greenland Ice Sheet, *Science*, 313: 1958-1960.

[7] Rott H, Muller F, Nagler T, Floricioiu D, The imbalance of glaciers after disin-

tegration of larsen-B ice Shelf , Antarctic Peninsula, *The Cryosphere*, 5:125-134.
[8] IPCC 2019, Special report on the ocean and cryosphere in a changing climate. Intergovernmental Panel on Climate Change, Cambridge University press, Cambridge, UK, 2019.
[9] Santer BD, et al. Tropospheric warming over the past two decades, *Scientific Reports*, 2017, Art. No. 2336.
[10] MacGuffie K, Henderson-Sellers A, The Climate Modeling Primer, 4th Edition, John Wiley and Sons, New York, USA, 2014, 231 pp.
[11] Washington W, Parkinson CL, An Introduction to Three-Dimensional Climate Modeling, University Science Books, 2005, 354 pp.
[12] Bindoff, NL, et al. , Detection and attribution of climate change: From global to regional, Chapter 10 of Climate Change 2013: *The Physical Science Basis.* Contribution of Working Group I to the Fifth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change [Stocker TF, et al., Eds.], Cambridge University press, Cambridge, UK, 2013, 867-952.
[13] Giorgi F, Climate change hotspots, *Geophysical Research Letters,* 2006, 33, doi:10.1029/2006GL025734.
[14] Giorgi F, Lionello P, Climate change projections for the Mediterranean region, *Global and Planetary Change*, 2008, 63, 90-104.
[15] Giorgi F, Raffaele F, Coppola E, The response of precipitation characteristics to global warming from climate projections, *Earth System Dynamics*, 10:73-89.
[16] Lenton TM, et al., Climate tipping points - too risky to bet against, *Nature*, 2019, 575: 592-596.
[17] Hall CAS, Lambert GJ, Balogh SB, EROEI of different fuels and the implications for society, *Energy Policy*, 64:141-152.
[18] Giorgi F, Thirty years of regional climate modeling: Where are we and where are we going?, *Journal of Geophysical research - Atmospheres,* 124:5696-5723.
[19] Wilby RL, et al., Statistical downscaling of general circulaiton model output: A comparison of methods, *Water Resources Research*, 34:2995-3008.

Istituto Lombardo (Rend. Scienze) 152, 113-154 (2018)

VERS UNE MEILLEURE COMPRÉHENSION DES PREMIÈRES IDÉES SCIENTIFIQUES D'ALBERT EINSTEIN – SON ENVIRONNEMENT SCIENTIFIQUE EN ITALIE (1895-1902)

CHRISTIAN BRACCO (*) et JEAN-PIERRE PROVOST (**)

Nota presentata dal s.c. O. Nicrosini
(Adunanza del 7 giugno 2018)

SUNTO. – L'«anno miracoloso» di Einstein (1905) che lo vede pubblicare, nell'arco di qualche mese, quattro articoli e una tesi che ha caratterizzato la fisica del suo tempo, appare ben lontano dagli anni nei quali, giovane studente alla Scuola Politecnica Federale di Zurigo, (1896-1900), e, successivamente, impegnato alla redazione della tesi (1901-1902), tornava, regolarmente, a far vista ai suoi familiari a Milano. Dato che Albert Einstein si è espresso molto poco sulle sue domande e sulle sue posizioni scientifiche in questo periodo, procediamo ad analizzare queste ultime, dettagliatamente, esaminando il contenuto delle lettere che egli scrive alla sua futura moglie Mileva Marić. A tal fine facciamo riferimento a uno studio precedente riguardante l'ambiente scientifico di Einstein a Milano, pubblicato *nei Rendiconti di Scienze*. La lettura, alla biblioteca dell'*Istituto Lombardo*, del *Festschrift* di Lorentz, ha avuto un ruolo importante nelle riflessioni di Einstein nella primavera del 1901, quando si trova a Milano, in compagnia del suo amico Michele Bresso. Discutiamo, in particolare, di come la lettura di un articolo di Max Reinganum, ha portato Einstein su una "falsa pista", conducendo il medesimo a ritirare, agli inizi del 1902, una prima tesi delle quale la tesi del 1905 prendeva il predetto Einstein in contropiede. L'articolo di Henri Poincaré, nello stesso *Festschrift*, al quale Einstein fa riferimento nel 1906, dal canto suo, ha contribuito, probabilmente, sia alla presa di conoscenza di Einstein che il tempo locale, introdotto da

(*) SYRTE, Observatoire de Paris, Université PSL, CNRS, Sorbonne Université, LNE, 61 avenue de l'Observatoire, 75014 Paris, France.
E-mail: Christian.Bracco@obspm.fr

(**) Université Côte d'Azur (Professeur retraité), 720 route de la Turbie, 06360 Eze, France. E-mail: Provost@univ-cotedazur.fr

Hendrik Antoon Lorentz, sia un tempo vero, sia a una prima immagine dei quanta differente da quella di Max Planck. Quanto al passaggio sorprendente attraverso la fisica statistica (1902-1904) che portava, nel 1904, Einstein, insieme a Besso, a riallacciare i suoi rapporti con i quanta, mostreremo che è stato determinato da una lettura appassionata ma incompleta di Ludwig Boltzmann (1899-1901). In conclusione, il periodo anteriore al 1905, trascorso in parte a Milano, si rivela essere un periodo ricco scientificamente, che ha permesso, al giovane studente Einstein, di divenire l'esperto che conosciamo.

***

RÉSUMÉ. – L'«année miraculeuse» d'Einstein (1905), qui le voit publier en l'espace de quelques mois quatre articles et une thèse ayant marqué la physique de son temps, apparaît bien éloignée des années durant lesquelles, jeune étudiant à l'ETH de Zurich (1896-1900) puis en thèse (1901-1902), il revenait régulièrement dans sa famille à Milan. Albert Einstein s'étant très peu exprimé sur ses questionnements et ses positionnements scientifiques dans cette période, nous les analysons en détail à partir du contenu des lettres qu'il écrit à sa future femme Mileva Marić. Nous nous appuyons pour cela sur une étude antérieure portant sur son environnement scientifique à Milan publiée dans ces mêmes *Rendiconti di Scienze*. La lecture à la bibliothèque de l'*Institut lombard* du *Festschrift* pour Lorentz a joué un rôle important dans ses réflexions au printemps 1901, lorsqu'il est à Milan en compagnie de son ami Michele Besso. Nous discutons en particulier comment un article de Max Reinganum l'a mené sur une «*fausse piste*» le conduisant au retrait début 1902 d'une première thèse, dont celle de 1905 allait prendre le contrepied. Toujours dans le *Festschrift*, l'article de Henri Poincaré auquel Einstein fera référence en 1906, a de son côté probablement contribué à sa prise de conscience que le temps local introduit par Hendrik Antoon Lorentz est un vrai temps; il a pu aussi, chose surprenante, participer à une première image de quanta différente de celle de Max Planck. Quant au passage étonnant par la physique statistique (1902-1904), qui allait conduire Albert Einstein en 1904 avec Michele Besso à renouer avec les quanta, nous montrerons qu'il a été déterminé par une lecture passionnée mais incomplète de Ludwig Boltzmann (1899-1901). Finalement, la période antérieure à 1905, en partie à Milan, se révèle être une période riche scientifiquement, qui a permis au jeune étudiant Albert de devenir le savant Einstein que l'on connaît.

1. INTRODUCTION

L'année 1905 est une année bien particulière dans l'histoire de la physique. Elle voit Albert Einstein (1879-1955), alors jeune expert de troisième classe au bureau des brevets à Berne, soumettre sur une période de quelques mois quatre articles et une thèse qui ont marqué la physique de son temps: l'introduction (le 18 mars [1]) des quanta lumineux, une hypothèse «*révolutionnaire*» prêtant à la lumière une structure corpusculaire s'opposant à sa description ondulatoire; l'interpréta-

tion quantitative du mouvement brownien (le 11 mai [2]) comme une application directe de sa thèse (le 30 avril [3]) sur la détermination des tailles des molécules; la naissance de la théorie de la relativité restreinte (le 30 juin [4]), complétée par l'inertie de toute forme d'énergie (le 27 septembre [5]). 1905 apparaît donc comme une «*année miraculeuse*» en reprenant les termes de John Stachel [6], d'autant plus que ses travaux précédents sur la théorie moléculaire de la chaleur, plus espacés (le 26 juin 1902 [7], le 26 janvier 1903 [8] et le 29 mars 1904 [9]), ne laissaient pas entrevoir directement cet aboutissement, et que les premiers articles sur la capillarité (13 décembre 1900 [10]) et sur la dissociation dans les solutions conductrices (30 avril 1902 [11]) étaient jugés d'un faible intérêt par Einstein lui-même. L'année 1905 paraissant si singulière, avec l'arrivée soudaine de nouvelles idées, l'existence de liens possibles avec des questionnements ou des positionnements scientifiques bien antérieurs semble *a priori* difficile à établir,[1] en particulier pour la période où Einstein, jeune étudiant à l'ETH de Zurich (1896-1900),[2] puis en thèse (1901-1902), séjourne régulièrement à Milan dans sa famille [13]. Une telle étude aurait été plus simple si Einstein avait eu un statut universitaire à la sortie de son école, et avait commencé sa thèse en tant qu'assistant, ce qui l'aurait amené inévitablement à des discussions avec ses collègues, dont on aurait pu avoir un écho.

Einstein lui-même n'a guère communiqué sur ses positionnements avant 1905. Pourtant, son ami Michele Besso (1873-1955) n'a cessé dans sa correspondance, dès 1921 et pendant au moins 25 ans, de l'inciter à retracer l'histoire de ses idées, considérant qu'«*un exposé précis, avec «tes mauvaises pistes» et tes «espoirs enterrés» serait d'une valeur immense pour l'intérêt de la science*» ([14], p. 221). Einstein a surtout brossé, quand on le lui demandait, un portrait très général et très rétrospectif de ses interrogations et de ses lectures avant 1905. Il est vrai que c'était pour lui l'occasion de replacer, dans un cadre historique et philosophique, sa contribution scientifique remarquable aux côtés de celles de Isaac Newton, Ludwig Boltzmann, Hendrik Antoon Lorentz,

---

[1] Concernant la lumière Robert Rynasiewicz et Jürgen Renn [12] ont cependant remarqué qu'une première idée des quanta était présente à l'esprit d'Einstein en 1904, et peut-être même dès 1901.

[2] *L'École polytechnique fédérale de Zurich*: *Eidgenössische Technische Hochschule Zürich* [ETH].

Max Planck, etc., et l'occasion, pour satisfaire le lecteur - ou l'auditeur - de rapporter quelques anecdotes. Une des plus célèbres est celle selon laquelle à l'âge de seize ans il se voyait «*poursuivre un faisceau lumineux à la vitesse c*», anecdote dans laquelle disait-il «*la théorie de la relativité est déjà contenue*» [15]; mais aucun historien ne peut sérieusement en tirer profit.

Einstein a été discret sur son environnement scientifique dans la période 1895-1896 qui a précédé son entrée à l'ETH. On ne connaît exactement ni quand, ni dans quel cadre, ont commencé ses discussions avec Michele Besso, dont il dira plus tard qu'il a été pour lui la meilleure caisse de résonance de toute l'Europe. Einstein n'a jamais commenté la «*fausse piste*» discutée dans [16], sur laquelle nous revenons à la section 2, qui concerne les forces moléculaires et l'idée qu'on pourrait se passer des dimensions des molécules, «*ce concept mathématiquement si peu clair*» ([17], L. 29). Elle l'a conduit à une thèse soumise au professeur Alfred Kleiner de l'université de Zurich fin 1901, dont il a difficilement vécu le retrait début février 1902; une thèse dont il prendra le contrepied en 1905 en s'intéressant à ces dimensions moléculaires, toujours avec Kleiner. Einstein a aussi associé dans ses notes autobiographiques ses trois articles de physique statistique au souci «*de trouver des faits qui garantissaient autant que possible l'existence d'atomes d'une taille bien définie*» [15]; il s'agissait en fait surtout pour lui, comme on l'analysera à la section 3, de clarifier des lectures antérieures (1899-1901) de Boltzmann. Il ne signale pas en particulier que l'idée de quanta était déjà présente en 1904 à la fin du troisième article, probablement en liaison avec des discussions partagées avec Michele Besso au printemps 1901 à Milan; nous revenons sur les quanta avant 1905 à la section 5.[3] En ce qui concerne la théorie de la relativité restreinte, Einstein en a parlé à plusieurs reprises, et les articles sur sa possible genèse sont très nombreux. Certes, la période qui va de la date (1898) à laquelle il dit y avoir pensé pour la première fois en liaison avec la lecture du livre de Ernst Mach *La mécanique, exposé historique et critique de son développement*, à la date de la lecture (entre 1902 et 1904) de *La science et l'hypothèse* de Henri Poincaré, a été examinée en détail en tenant compte des nombreux

[3] Abraham Païs [18] a remarqué aussi qu'il était étonnant qu'Einstein ne mentionne pas les quanta quand il introduit le principe d'équivalence en 1911, alors qu'ils sont implicitement présents dès le début de son article.

ouvrages [6] lus par Einstein. Mais cet examen est souvent resté sur un terrain essentiellement factuel et académique. Enfin, si pour préciser quand Einstein a pris conscience de l'idée de relativité et de la nécessité de rejeter l'éther[4] il a été fait état d'interrogations du jeune Einstein, jamais une dynamique globale de ses positionnements n'a été développée, ce que nous tenterons de faire dans la section 4.

Pour comprendre de manière plus précise les idées d'Einstein avant 1905, il pourrait y avoir la correspondance contemporaine avec Michele Besso, mais les lettres de cette période, réduites à trois, nous apprennent seulement (en 1903) qu'il pense à l'hydrodynamique et à la taille des ions (prélude à sa future thèse) et qu'il y a eu des remarques (perdues depuis) de Michele (alors à Trieste), concernant les deux premiers articles de physique statistique, avant qu'il ne rejoigne Albert le 1er janvier 1904 au Bureau des brevets ([14], p. xxiv). Pour parvenir à établir un lien entre l'avènement des articles de 1905 et les années qui précèdent, nous nous baserons sur les lettres d'Albert Einstein à sa condisciple à l'ETH et future femme, Mileva Marić (1875-1948), correspondance dont nous examinerons en détail le contenu scientifique [17]. Ces lettres, Albert les écrit principalement entre 1898 et 1901, quand il séjourne à Milan, pendant les vacances semestrielles de l'ETH et qu'il se trouve séparé de Mileva. Il trouve en Michele un ami «*à l'esprit extrêmement fin*», qui l'accompagnera tout au long de son développement scientifique jusqu'en 1915, c'est-à-dire pendant l'essentiel de sa production scientifique. Les échanges avec Michele Besso passent par des discussions quasi-quotidiennes pendant la période 1899-1901 quand ce dernier réside à Milan. En septembre 1900, Albert écrit ainsi à Mileva «*le soir, je suis souvent chez Michele*» et il précise le 4 avril 1901 quelques sujets abordés: «*Hier soir, pendant quatre heures, j'ai pris grand intérêt à parler boutique avec lui* [Michele]. *Nous avons discuté de la séparation essentielle de l'éther lumineux et de la matière, de la défini-*

[4] On ne dispose pas d'informations précises sur la période 1902-1905. Il est possible que cette prise de conscience se soit faite subitement au printemps 1905 parallèlement aux réflexions sur les quanta. Dans la préface du livre de Stachel [6], au sujet des quanta et de la relativité, le célèbre physicien Roger Penrose affirme: «*Pour moi il est virtuellement inconcevable qu'il* [Einstein] *ait proposé la même année deux papiers dépendant de conceptions de la nature qu'il sentirait être en contradiction*». Nous verrons section 4 (en particulier note 30) que relativité et quanta arrivent simultanément fin 1900 dans la littérature scientifique.

tion du repos absolu, des forces moléculaires, des phénomènes de surface, de la dissociation» ([17], L. 26), des sujets qu'il qualifie aussi de «*nos recherches*» quand il écrit à Mileva, mais de «*mes recherches*» dans tout autre contexte.

Considérés ensemble et reliés dans le cadre de leur environnement scientifique, ces témoignages révèlent cependant un tableau vivant assez précis, qui donne une place centrale aux réflexions d'Albert Einstein à Milan entre 1899 et 1901. Dans ce tableau, il faut comprendre ses commentaires et ses interrogations comme celles d'un étudiant passionné, assoiffé de lectures scientifiques, et n'hésitant pas, à la suite de celles-ci, à émettre des hypothèses qu'il abandonnera ensuite pour d'autres. On ne peut imputer à l'homme de science que sera Einstein, à partir de 1905, la naïveté, l'inexpérience, voire les erreurs du jeune Albert. Inversement, ce serait un contresens historique de projeter le savant Einstein sur l'étudiant Albert. En particulier quand ce dernier parle de «*théorie*» sans plus de précisions, il ne s'agit que d'idées, parfois éphémères, même si elles peuvent être intéressantes. Aussi prendrons-nous la précaution de distinguer au niveau du texte de cet article «Albert» avant 1905 de «Einstein» après, pour éviter toute confusion. Il faut noter aussi que la partie scientifique des lettres d'Albert à Mileva est très limitée, avec parfois des interruptions longues, et assez souvent des absences de références explicites aux lectures. La compréhension de certaines périodes, comme celle, très intense du printemps 1901, où Albert lit à la bibliothèque de l'*Académie des sciences et des lettres de l'Institut lombard* le *Festschrift* pour Lorentz sans s'y référer, nécessite une étude historique parallèle de son environnement. Nous rappelons à la section 2 quelques résultats de cette étude publiés dans les *Rendiconti* de l'*Institut lombard* en 2014 [19] et dans le livre *Quand Albert devient Einstein* [13] (traduit en italien en 2019).

2. Einstein à Milan et la thèse abandonnée

Le travail historique [13,19] sur cet environnement scientifique a été mené à Milan à l'*Institut lombard* et aux bibliothèques de mathématiques de l'université et de l'*Ecole Polytechnique* de Milan; à Pavie aux archives de l'université et aux archives diocésaines; par des contacts personnels établis avec les familles Cantoni et Besso à Milan, à Rome et en Suisse; enfin, par la restitution du cadre industriel, technique et

financier des années 1890-1900 en Italie grâce à une documentation abondante. Ces recherches, qui permettent de replacer les lettres d'Albert à Mileva ou les allusions rétrospectives de Michele Besso dans leur contexte, nous ont permis d'établir un certain nombre de résultats nouveaux que nous présentons ici chronologiquement.

La rencontre d'Albert Einstein et de Michele Besso a eu lieu en 1895 avant la première tentative d'Albert d'entrer à l'ETH en octobre. En effet, dans une lettre datée du 10 octobre 1945, Michele lui écrit «*N'est-ce pas à nouveau notre point de départ d'il y a plus de cinquante ans, entre Newton et Huygens ?*», ce qui situe sans ambiguïté la date de cette première rencontre avant le 10 octobre (voir p. 75, note 4 de l'édition italienne [13]). On peut même ajouter que l'allusion de Besso à cette première rencontre célèbre son cinquantième anniversaire. Les précisions apportées dans [13,19] montrent que cette rencontre intervient dans le contexte de l'industrialisation électrique de l'Italie, où évoluent les familles Einstein et Besso, cette dernière jouant même un rôle déterminant: avec Marco Besso (qui deviendra président des *Assicurazioni Generali*), Beniamino Besso (directeur d'une compagnie de chemins de fer) ou Vittorio Cantoni, du côté de la mère de Michele, ingénieur de l'ETH et de l'*École polytechnique* de Milan (qui implante les premiers transformateurs en 1886 à l'usine électrique de Tivoli près de Rome). Les Einstein et les Besso ont un ami commun, le ministre des finances, enseignant à l'*École polytechnique* de Milan, le professeur Luigi Luzzatti. Maja Einstein-Winteler, la sœur cadette d'Albert, dira à son propos qu'Albert s'en était fait un ami paternel à l'été 1895 à Airolo sur le Gotthard. Quoi de plus naturel pour Michele et Albert d'entrer en contact en 1895, au moment où ce dernier cherche à entrer à l'ETH sans avoir l'âge requis (il n'a que seize ans) et sans diplôme (il n'a pas son baccalauréat) ? Michele vient tout juste d'en sortir (promotion 1895) et il est possible qu'il l'ait alors aidé à se préparer au concours de l'ETH. En tout cas, la richesse des réflexions d'Albert en mars-avril 1901 n'est pas sans lien avec Michele, qu'il voit alors à Milan «*le soir*» et de manière quasi-quotidienne.[5]

---

[5] Cette richesse apparaît aussi dans une lettre du 13 juin 1913, découverte au cours de nos recherches à la fondation Marco Besso à Rome [13], où Michele conclut: "*Tra giorni, credo, rivedrò i miei, rivedrò a Trieste il caro zio, e se i medici lo permetteranno (non ho veramente motivi di dubitarne), ritornerò qua* [a Zurigo]*, ad assistere alla lotta*

Un second résultat de ce travail est qu'Albert Einstein était lié amicalement non seulement à Ernestina Marangoni à Pavie, jeune fille issue de la bourgeoisie, alors âgée de dix-neuf ans, mais était lié aussi à son oncle Carlo, physicien très connu, ancien étudiant et assistant de Giovanni Cantoni à l'université de Pavie en 1865-66, puis de Carlo Matteucci à Florence à l'*Insitut technique*. Carlo rendait visite à son frère Giulio, le père d'Ernestina, une fois l'an pendant la période des vendanges à Casteggio, près de Pavie, une période qu'Albert passait alors dans la famille Marangoni. Carlo était entre autres spécialiste des phénomènes de capillarité (*cf*. l'effet Gibbs-Marangoni) et on comprend bien l'intérêt d'Albert pour ce domaine. Son ancien directeur de thèse, Giovanni Cantoni, était connu en particulier pour avoir donné le premier une explication cinétique du mouvement brownien en étendant la loi de distribution de Maxwell aux particules browniennes, concluant que leur mouvement est «*une des démonstrations expérimentales les plus belles et les plus directes des principes fondamentaux de la théorie mécanique de la chaleur*» [13,20]. Si Carlo en a parlé avec Albert, il n'est pas étonnant qu'à la suite de sa thèse [3] l'application au mouvement brownien soit venue soudainement à l'esprit d'Einstein, comme il l'a rapporté à Robert Shankland en 1952 [21].

Une lecture précise des lettres à Mileva, avec en tête la recherche du lieu où Albert Einstein poursuivait son travail scientifique (entamé à Zurich) pendant les vacances semestrielles de l'ETH, a permis d'établir que la «*bibliothèque*» à laquelle il fait référence à plusieurs reprises était celle de l'*Institut lombard* [13,19]. Son accès peut lui avoir été permis par Giuseppe Jung, un oncle maternel par alliance de Michele Besso, membre de l'*Institut* et professeur de mathématiques à l'*École polytechnique* de Milan. Albert mentionne dans une lettre à Mileva du 4 avril 1901 que Jung «*l'un des professeurs les plus influents en Italie*», doit intercéder en sa faveur auprès de «*ses amis*», «*les professeurs italiens les plus réputés*» ([17], L. 26) Augusto Righi et Angelo Battelli, en vue d'obtenir un poste d'assistant. Mais cet accès aurait pu lui être permis aussi directement par Giuseppe Colombo, président de l'*Institut*. Colombo avait supervisé le rachat de l'entreprise *Einstein, Garrone et C^ie^* à Pavie pour le compte de son bras droit, l'ingénieur Carlo Monti,

---

dell'amico Einstein col grande Ignoto: opera e tormento da gigante, a cui assisto da pigmeo, ma da pigmeo veggente".

avec lequel il avait réalisé l'éclairage de la Scala de Milan en décembre 1883. La bibliothèque de l'*Institut lombard*, alors au palais *Brera*, est richement dotée. Elle est la seule à contenir à cette époque à Milan les articles qui apparaissent dans les lettres à Mileva et qui figurent dans les *Annalen der Physik und Chemie*, les *Annalen der Physik* et leurs *Beiblätter*. Elle ne possède en revanche pas les livres qu'Albert demande à Mileva de lui faire parvenir; enfin elle se trouve très proche du lieu de résidence de la famille Einstein au 21 rue Bigli.[6] La connaissance du lieu où travaille Albert à Milan a été déterminante pour comprendre les références scientifiques à Wilhelm Wien, Planck, Max Reinganum et Paul Drude, qui sont contenues dans les lettres. Le volume du *Festchrift* pour Lorentz qui paraît dans les *Archives néerlandaises des Sciences Exactes et Naturelles* [23], remis à Lorentz le 11 décembre 1900 pour le 25ème anniversaire de sa thèse de doctorat, est reçu à la bibliothèque de l'*Institut* le 31 janvier 1901. Il a pu jouer un rôle important dans les réflexions d'Albert au printemps 1901. En effet, couvrant les principaux sujets d'actualité avec environ 70 contributions, il apparaît comme un ouvrage incontournable pour un étudiant en thèse. On y trouve, comme on le verra, des articles de Reinganum, Planck et Poincaré mais aussi des articles de Daniel Berthelot, Georg Hartley Bryan, Emil Georg Cohn, Heike Kammerling Onnes, Righi, Emil Wiechert, Wien, etc.

Les sources bibliographiques disponibles à l'*Institut lombard* doivent être complétées par l'analyse du contenu de la bibliothèque personnelle de Giuseppe Jung léguée par sa fille Maria Vittoria en 1926 aux bibliothèques de mathématiques de l'*École polytechnique* et de l'université de Milan. Elle comporte environ 2500 tirés-à-part d'articles mathématiques et 500 livres, essentiellement des ouvrages de mathématiques et quelques rares ouvrages de physique (dont le traité de Gustav Kirchhoff, celui de James Clerk Maxwell ou de Johannes Diderick Van der Waals). Fait remarquable pour une bibliothèque de mathématicien,

---

[6] Notons aussi que le lien avec Colombo, du point de vue industriel, se double d'un lien avec Galileo Ferraris, sur les aspects techniques, et notre étude a bénéficié des recherches du professeur Andrea Silvestri, de l'*École polytechnique* de Milan, membre de l'*Institut lombard*, qui a trouvé la plus ancienne lettre rédigée par Albert Einstein, datée du 12 août 1895 à Pavie, où il demande à Ferraris «*une petite recommandation privée*» auprès du professeur Weber de l'ETH [22].

elle contient la plupart des ouvrages récents sur l'électricité et la télégraphie sans fils, publiés entre 1899 et 1901. Dans cette période, Michele Besso travaille à Milan dans une compagnie pour le développement électrique et aussi peut-être à une thèse sur la télégraphie sans fil, un sujet sur lequel Albert dit réfléchir à Mileva en septembre 1900 pour le compte de Michele [13, 24]. Parmi ces ouvrages trois sont de Henri Poincaré, qui, soit dit en passant, n'intéressait visiblement pas directement Jung en tant que mathématicien (il n'en possédait qu'un tiré-à-part). Nous verrons à la section 4 quel usage de *Electricité et Optique* de Poincaré a pu être fait au printemps 1901, s'il a été consulté par Michele ou Albert.[7] Rappelons enfin que parmi les tirés-à-part, les seuls articles de physique présents sont ceux d'Albert Einstein entre 1901 et 1906, correspondant à ses douze premières publications (qui malheureusement, n'ont pas été conservées).

L'identification de la bibliothèque de l'*Institut lombard* comme lieu de travail d'Albert Einstein nous a permis, en croisant le contenu scientifique des lettres à Mileva, de découvrir qu'il s'intéresse prioritairement à un article de Max Reinganum publié dans le *Festschrift* pour Lorentz. La lecture de cet article va le pousser à réorienter sa thèse avec comme conséquence importante son abandon ultérieur [16] comme nous le rappelons maintenant. En octobre 1900, on apprend par une lettre à Mileva qu'Albert a trouvé récemment à Zurich des «*résultats sur la capillarité* […] *sembl*[ant] *totalement inédits*» ([17], L. 23) et qu'il compte avec elle «*trouver des données empiriques*» auprès de Kleiner, avec qui il s'inscrira en thèse. Fin décembre, il soumet sur ce sujet un article aux *Annalen* [10]. Notre objectif ici n'est pas de rappeler les motivations d'Albert pour la capillarité ou d'entrer dans le contenu exact de cet article (voir [13], chapitre VI), mais d'examiner en quoi il a constitué une «*fausse piste*» sanctionnée par le retrait d'une première thèse. L'idée d'Albert, reprise aux chimistes (Wilhelm Ostwald, Roberto Schiff,…), mais fausse, est que chaque élément chimique est caractérisé par un coefficient spécifique qui joue, vis-à-vis des forces moléculaires, le même rôle que la masse pour la gravitation (avec une loi universelle différente de $1/r^2$ mais

[7] L'exemplaire de la bibliothèque de Jung porte la marque «*Hommage des éditeurs*». Comme Poincaré l'a déposé à la bibliothèque de l'*Institut de France* le 14 décembre 1900, on ne peut douter qu'il était présent début 1901 dans la bibliothèque de Jung.

restant indéterminée). L'examen d'une quarantaine de composés organiques et l'usage d'une méthode des moindres carrés le conduit aux valeurs (à un facteur près) de ces coefficients pour les éléments H, C, O, Cl, Br, I. Albert se sert de cet article pour tenter d'obtenir un poste d'assistant, notamment auprès de Ostwald, mais en vain. Pour Mileva, en décembre, la thèse devait être soutenue vers Pâques 1901; mais une prolongation inattendue a lieu. Le 14 avril, Albert écrit à son ami Marcel Grossmann: «*En ce qui concerne la science, j'ai eu quelques idées splendides, qui ne nécessitent maintenant qu'une incubation appropriée. Je suis maintenant convaincu que ma théorie des forces d'attraction atomiques peut aussi être étendue aux gaz, et qu'il sera possible d'obtenir les constantes caractéristiques de presque tous les éléments, sans beaucoup d'efforts. Cela va également amener le problème de la parenté interne entre forces moléculaires et action à distance newtonienne beaucoup plus proche de sa solution. Il est possible que les expériences déjà faites par d'autres avec d'autres objectifs vont suffire pour tester la théorie. Dans ce cas, je vais utiliser tous les résultats existants dans ma thèse de doctorat*» (voir CPAE 1 in ref. [17], pp. 315-316). Le lendemain, il s'adresse en des termes analogues à Mileva, comptant «*déterminer un grand nombre de* c_α» ([17], L. 28) à partir des gaz et des solutions salées diluées. Comme nous l'avons montré, l'article de Max Reinganum sur *Les forces moléculaires dans les gaz faiblement comprimés* [25] dans le *Festschrift* pour Lorentz, où l'auteur obtient l'équation d'état des gaz à partir seulement des forces d'attraction «*planétaires*» tout en s'affranchissant de la taille des molécules, a dû attirer son attention. En effet, Albert connaît Reinganum (cité par Boltzmann dans ses *Leçons sur la théorie des gaz* [26]) et a même écrit le 12 avril à Kammerling Onnes, le directeur de son laboratoire à Leyde, pour un poste d'assistant. Il sait que négliger les dimensions moléculaires est contraire à tous les travaux bien connus sur le sujet (Berthelot critique par exemple l'approche de Reinganum dans le même *Festschrift* [27]). Mais il persiste avec les c_α et remet sa thèse à Kleiner en novembre. Par les lettres à Mileva, on apprend le 28 qu'Albert n'a pas encore reçu de rapport de sa part et ne croit pas «*qu'il ose refuser* [s]*a thèse*»; puis le 12 décembre que «*Kleiner ne* [lui] *a pas encore écrit*» et le 17 qu'«*il tarde à* [lui] *répondre*». Le 19, Albert informe Mileva qu'il compte dédier sa thèse de doctorat à Marcel Grossmann pour le remercier de l'avoir aidé à obtenir un poste aux Bureau des brevets à Berne, puis, se comparant à ses condisciples de l'ETH, il ajoute le 28: «*Tu vois c'est ton Johontze*l [Albert] *qui a fini son travail* [de thèse] *le premier*». En décembre, Mileva

confirme à son amie Helena Savić que la thèse est achevée: «*Albert a écrit une magnifique étude, qu'il a soumise comme thèse. Il obtiendra probablement un doctorat dans quelques mois* […]. *Le sujet porte sur la recherche des forces moléculaires dans les gaz en utilisant différents phénomènes connus*» (voir CPAE 1, pp. 319-320).

Début février 1902, Albert Einstein retire sa thèse (un manuscrit aujourd'hui disparu). Il est très vraisemblable que Kleiner ait demandé un avis à Boltzmann, pour lequel le refus d'Albert de prendre en compte les dimensions moléculaires a dû paraître constituer une erreur grossière. Néanmoins, Albert soumet peu après un deuxième article dans les *Annalen* [11], dans lequel les c_a sont introduits pour les ions et les solvants, mais sans pouvoir en déduire de valeurs en raison des multiples hypothèses faites. Il est probable que l'acceptation de cet article, avec l'aide de Kleiner, a été une forme de compensation au retrait de la thèse. D'ailleurs, à la fin de l'article, Albert s'excuse de n'avoir présenté «*qu'un maigre projet pour des recherches laborieuses sans contribuer en quoi que ce soit à leur solution expérimentale*». Précisons que dans le comité de rédaction des *Annalen*, il y avait en particulier Planck qui a dû apprendre à cette occasion, qu'en attendant sa soutenance, Albert travaillait à combler «*un gap*» dans la théorie de Boltzmann pour «*fournir une* [vraie] *expression mathématique de l'entropie du point de vue de la mécanique*» (voir introduction de [7]). L'éditeur en chef des *Annalen* était Drude, à qui Albert avait envoyé, comme il le dit à Mileva début juin 1901, «*une longue lettre* […] *contenant deux objections à sa théorie des électrons*» assurant que Drude «*aura sûrement bien du mal à les contrer de façon logique*» ([17], L. 37), et ajoutant qu'il lui a parlé de sa recherche de poste.[8] Quelques jours plus tard, il apparaît que Drude a dû répondre sèchement. Mais il n'a visiblement pas tenu rigueur à Einstein de son courrier maladroit. Finalement, une «*fausse piste*» scientifique allait se terminer par un tournant vers la physique statistique et une place reconnue dans la science allemande.

---

[8] Il est possible aussi qu'Einstein ait parlé dans sa thèse de façon critique de la théorie de Drude à la suite de la lecture d'un autre article de Reinganum, où ce dernier signale que l'application de la cinétique à des électrons libres pose un problème concernant les chaleurs massiques (Renn [28] avance que cela aurait contribué au rejet de la thèse). Reinganum dit aussi que la taille d'un électron ne doit pas intervenir dans la théorie (ce qui a dû séduire Albert) alors que Drude donne un modèle électromagnétique de la taille et de la masse de l'électron.

3. La lecture incomplète de Boltzmann (1899-1901) et l'intérêt pour la physique statistique (1902-1904)

La lecture de Boltzmann par Albert Einstein a joué aussi un rôle important dans l'orientation des travaux qui ont conduit à sa thèse abandonnée et a été déterminante pour son tournant vers la physique statistique. On peut la suivre à travers sa correspondance avec Mileva. La première référence à Boltzmann dans les lettres date de la fin de l'été 1899. Le 10 septembre, Albert envisage de se «*faire envoyer d'ici une semaine à Milan les livres de Helmholtz, Boltzmann et Mach* [qui ne sont pas présents à la bibliothèque de l'*Institut lombard*] *par la Bibliothèque* [municipale de Zurich]», ajoutant à Mileva «*je vous promets solennellement de tout retravailler avec vous*» ([17], L. 10). La lecture désirée du livre de Hermann von Helmholtz est liée comme on le verra à la section 4 à des questionnements sur la théorie électromagnétique et sur le mouvement possible de l'éther lumineux. L'appel simultané à Boltzmann, grand défenseur de l'existence des atomes, sujet qui intéresse le jeune Einstein, et à Mach dont la philosophie pragmatique lui a été vantée par Michele, est probablement lié au combat que Boltzmann engage à partir de 1895 contre les énergéticiens, principalement Georg Helm, Ostwald et Mach.[9] Ceux-ci s'appuyaient sur les travaux de thermodynamique de Josiah Willard Gibbs qu'Ostwald avait publiés en allemand en 1892 (malgré semble-t-il quelques réticences de l'auteur [30]). Contrairement à Gibbs et à Planck, qui tous deux accordaient un rôle essentiel à l'entropie, ils plaçaient le concept d'énergie macroscopique au-dessus de tout et excluaient une explication de la chaleur et du second principe en termes de mouvements moléculaires. Helm avait écrit en 1896 sur l'énergétique un article de référence dans les *Annalen* (suivi d'un livre en 1898 sur son développement historique) et Mach s'était dépêché, la même année, de publier ses *Wärmelehre* ([29], p. 208); de son côté, Planck, lui aussi vivement

[9] À propos de la polémique de Boltzmann avec Ostwald lors d'un meeting à Lübeck en 1895, le physicien théoricien Arnold Sommerfeld rappelle à l'occasion du centenaire de la naissance de Boltzmann: «*Le champion de l'énergétique était Helm ; derrière lui se tenait Ostwald et derrière les deux la philosophie de Ernst Mach* […]. *L'opposant était Boltzmann secondé par Felix Klein* […]. *Nous, jeunes mathématiciens, étions du côté de Boltzmann*» ([29], p. 27).

opposé aux énergéticiens, avait publié en 1897 un ouvrage moderne et très complet de thermodynamique [31] qui ne se basait pas sur l'hypothèse atomique mais ne la niait pas non plus. En 1898, Albert avait déjà eu des notions de théorie cinétique des gaz à travers le cours de thermodynamique du professeur Heinrich Friedrich Weber à l'ETH; la validation possible de l'hypothèse atomique était d'actualité.

Mais en dehors de leur intérêt intrinsèque, les trois livres commandés à la bibliothèque de Zurich doivent, dans l'esprit d'Albert Einstein, les aider, Mileva et lui, à proposer au professeur Weber un sujet de travail pour leur diplôme de fin d'études en 1899-1900. Après avoir évoqué fin septembre à Mileva un «*travail sur le mouvement relatif de l'éther lumineux par rapport à la matière pondérable que le «patron» traite avec tant de mépris*» ([17], L. 11), Albert revient prudemment à la thermodynamique de Weber. Le 10 octobre, il parle de «*thermoélectricité*» et d'une méthode ne nécessitant «*aucun appareil qui ne nous serait pas facilement accessible*» (dans le laboratoire de Weber), méthode qui permettrait de déterminer le «*thermoélément*» qui serait «*responsable de la chaleur latente dans les métaux*».[10] Weber n'a pas dû donner son accord car Einstein dira plus tard que le diplôme (passé en juillet 1900 en collaboration avec Mileva) a porté sur la conduction thermique. Albert reviendra à la thermoélectricité quand il envisagera de travailler à une thèse dans le laboratoire de Weber fin août. Il parlera alors à Mileva de «*l'effet Thomson*», qui désigne l'échange thermique avec l'extérieur qu'a une jonction entre deux métaux lorsqu'elle est parcourue par un courant électrique. Le «*thermoélément*» est ici clairement constitué par les charges mobiles dont l'entropie dépend du métal. Mais Albert abandonnera ce sujet pour la capillarité en octobre 1900.

Le livre de Boltzmann emprunté par Albert Einstein est le tome 1 des *Leçons sur la théorie des gaz* [26]. Pendant l'année de diplôme, il a pu lui servir à travers la référence que Boltzmann fait dans sa préface au traité d'Oskar Emil Meyer «*si notoirement précieux pour les chimistes et étudiants en chimie physique*»,[11] référence répétée à la fin du chapitre I où il est question notamment de conduction thermique (sujet du diplôme) et

[10] Il s'agit plutôt de chaleur spécifique des métaux, un sujet sur lequel Albert reviendra au printemps 1901 en lien avec ses lectures de Eduard Riecke, Reinganum, Drude, etc. La question est de savoir lequel de la matière ou des charges en est le responsable.

de libre parcours moyen des molécules. Mais il n'apparaît dans les lettres à Mileva qu'un an plus tard, à la fin de l'été 1900, quand Albert réfléchit à un sujet de thèse et a le temps de lire cet ouvrage souvent très théorique et rempli de calculs non triviaux. Le 19 septembre, sa critique est élogieuse: «*Le Boltzmann est vraiment fantastique. Je l'ai presque fini. C'est un maître dans l'art de présenter les choses. Je suis persuadé de la justesse des principes sur lesquels repose sa théorie*» ([17], L. 21). Et il précise, se limitant à des propos que Boltzmann tient dans la toute première section (section 3) du premier chapitre (qui couvre les sections 3 à 14): «*C'est-à-dire que je suis convaincu qu'il s'agit réellement dans le cas des gaz d'un mouvement de masses ponctuelles discrètes de grandeur finie bien déterminée et dont le mouvement est soumis à certaines conditions*».[12] Concernant les forces (qui joueront un rôle essentiel dans sa thèse abandonnée) il ajoute: «*Boltzmann insiste à juste titre sur le fait que les forces hypothétiques entre molécules ne sont pas un élément essentiel de sa théorie étant donné que toute l'énergie est de nature cinétique*». Albert ne fait aucune mention dans ce chapitre des sujets qui tiennent à cœur à Boltzmann et qui l'occuperont à partir de 1902, comme ceux ayant trait à la grandeur *H* et son rapport à la distribution d'équilibre, l'entropie et l'irréversibilité

---

[11] Boltzmann écrit dans la préface de son livre en 1895 que l'époque lui paraît mal choisie, que «*la théorie des gaz est pour ainsi dire passée de mode en Allemagne*» et qu' «*il vient de paraître une deuxième édition du célèbre traité d'O. E. Meyer*». Mais il rappelle que ses propres recherches «*ont été citées avec estime par Kirchhoff dans ses Leçons sur la théorie de la chaleur*» [qu'Albert consultera] et par Poincaré tout à la fin de sa *Thermodynamique* «*mais non utilisées quand l'occasion s'en présentait*», et il conclut à la nécessité d' «*une nouvelle exposition de quelques-uns de leurs principaux résultats*». Il ajoute avoir été influencé par «*l'inoubliable congrès de la British Association tenu à Oxford* [en 1894] *et aussi* [les] *lettres écrites par de nombreux savants anglais* […] *en partie publiées dans Nature*» (journal où Boltzmann a participé à la discussion en 1895). Le congrès, initié par Joseph Larmor et Bryan portait sur «*l'état actuel de notre connaissance de la seconde loi*» avec notamment ses aspects statistiques et la démonstration par Boltzmann de l'irréversibilité appelée *H*-theorem au congrès ([29], p. 129). Les savants allemands étaient absents. Mais la polémique lancée fin 1895 par Ernst Zermelo, assistant de Planck, allait permettre à Boltzmann de s'exprimer dans les *Annalen* ([32], pp. 397-402).

[12] Ces conditions, au nombre de trois, concernent le calcul du nombre de chocs moléculaires. Les deux premières, triviales, définissent les éléments de volume dans l'espace et dans l'espace des vitesses. La troisième, développée par Boltzmann, est l'hypothèse de chaos moléculaire discutée au congrès d'Oxford de 1894.

thermodynamique (sections 4 à 8).[13] Certes, il ne mentionne pas non plus l'obtention par Boltzmann des équations hydrodynamiques du chapitre II (sections 15 à 20) intitulé «*Les molécules sont des centres de force – cas de forces extérieures et de mouvements sensibles du gaz*», ou encore du chapitre III «*Les molécules se repoussent avec une force inversement proportionnelle à la cinquième puissance de leur distance*». Mais il a dû cependant examiner toutes ces questions car il affirme le 19 septembre à Mileva: «*J'ai étudié tout le Boltzmann et un bout des harmoniques sphériques qui m'intéressent en fait maintenant pas mal*». Ces fonctions apparaissent à la section 22 du chapitre III (qui reprend les calculs du chapitre II), avec en note une référence à un livre de Eduard Heine qu'Albert conseillera à Mileva en avril 1901 pour un travail lié à la conduction thermique ([13] chapitre V). Quand le 15 avril 1901, Albert compte, comme on l'a vu, étendre aux gaz les constantes c_α de la capillarité, il fait implicitement référence pour Mileva à la section 17 du chapitre II intitulée *Dérivée par rapport au temps de sommes étendues à toutes les molécules d'une région*: «*Tu te rappelles sûrement que la force figure de façon explicite dans les intégrales qu'il faut calculer pour déterminer les coefficients de diffusion, de conduction thermique et de viscosité*». Si Albert semble bien se souvenir du tome 1 des *Leçons* en 1901, il n'y fera pas référence dans les trois articles de physique statistique de 1902, 1903 et 1904. Pourtant, à la section 6 (voir note 13) Boltzmann présente (certes rapidement) son nombre W de complexions d'où découle l'entropie et l'explication générale (non cinétique) de l'irréversibilité. Mais surtout, il renvoie, dans le

[13] La grandeur H est ici l'intégrale $\int f \ln f \, d\omega$ où f est la densité de molécules dans l'espace des vitesses. À la section 4, Boltzmann calcule l'effet des collisions sur l'évolution temporelle de f et montre que la distribution de Maxwell des vitesses moléculaires rend f stationnaire. À la section 5, il montre que celle-ci «*est la seule possible*» car «*H ne peut que décroître* [$dH/dt<0$] *en absence d'organisation moléculaire*». À la section 6 *Signification mathématique de la fonction H* il relie – H au logarithme du nombre (qu'il note Z) $W=n!/(n_1!n_2!\ldots)$ correspondant à la répartition des molécules dans un espace des vitesses discret. Il qualifie Z de «*probabilité relative*» et (en se référant à son article du 11 octobre 1877 ([32], pp. 205-214)) associe la décroissance de H à l'évolution de la répartition des vitesses vers «*la répartition la plus probable*». Enfin, à la section 8 *Chaleurs spécifiques. Signification physique de la grandeur H*, il établit la proportionnalité de – H à l'entropie dans le cas d'un gaz monoatomique, suggérant qu'elle est générale et que «*Le deuxième principe de la thermodynamique apparaît par conséquent comme un théorème de probabilité*».

texte (et non pas en note, ce qui constitue un cas unique dans les deux tomes), le lecteur à son article fondamental du 11 octobre 1877 (voir note 13). C'est d'ailleurs à cette section 6 que se réfèrera Planck dans son article de juillet 1903 pour le *Festschrift* de Boltzmann quand il comparera la définition de l'entropie de Boltzmann à celles de Gibbs de 1902 [33] et conclura que «*parmi toutes celles connues jusqu'à maintenant* [elle est] *la plus adéquate et la plus puissante*» [34]. Certes, il avait utilisé dès janvier 1901 la formule $S = k \ln W$ pour les quanta d'énergie (*cf.* section 5)!

Dans les lettres à Mileva, le nom de Boltzmann ne revient qu'en février 1902, quand la thèse sera abandonnée. Mais il est certain, qu'après avoir fini le tome 1 des *Leçons sur la théorie des gaz* qui l'a enthousiasmé, Albert Einstein a dû se procurer le tome 2 dès l'été 1900. Cette lecture va l'accompagner pendant un an et être à l'origine, en partie, à la fois de sa thèse abandonnée et de son passage à la physique statistique. Dans les deux premiers chapitres, Boltzmann revient en détail sur la théorie de Van der Waals de l'état fluide (gaz-liquide). Albert a dû découvrir notamment à la section 1 «*la nécessité de supposer qu'il existe entre deux molécules une force d'attraction* […] [car] *il est prouvé maintenant qu'on peut liquéfier tous les gaz*» (l'existence de cette force n'excluant pas la dimension des molécules); il a dû aussi être admiratif, aux dernières sections (22-23), qu'un même calcul conduise à la «*pression moléculaire*», la «*chaleur de vaporisation*» et «*aux équations fondamentales de la capillarité*». Cette lecture est l'occasion pour lui de se replonger dans les conférences de Hermann Minkowski du printemps 1900 à l'ETH sur la capillarité (plus complètes car Boltzmann ne mentionne pas de dépendance en température). Avec d'autres lectures (celles de Jules Violle, William Thomson, Mach, Meyer, Ostwald, etc.), elle a été à l'origine des travaux qui, d'octobre à décembre, l'ont conduit à son premier article aux *Annalen* [10]. Il est probable, qu'occupé par ses idées sur la recherche d'une expression générale des forces moléculaires, Albert n'a alors pas prêté attention au chapitre III consacré à la mécanique analytique de Liouville et à la distribution ergodique (sections 25 à 35),[14] ainsi qu'au

[14] Boltzmann démontre et discute le théorème de Liouville qui énonce l'invariance au cours du temps du volume élémentaire *dpdq* de l'espace de phase (sections 26-30). À la section 31, il précise ce que devient ce volume élémentaire quand l'énergie totale *E* est fixée afin de définir (section 32) la «*Distribution ergodique*», répartition uniforme des états du gaz dans l'espace de phase ainsi réduit.

chapitre IV (sections 36 à 47) intitulé *Gaz à molécules composées* où Boltzmann développe les applications de la loi d'équilibre exponentielle $e^{-2h\varepsilon}$, appelée aujourd'hui la loi de Boltzmann. Dans cette loi, ε est l'énergie du système considéré, par exemple une molécule ou un ensemble en interaction éventuellement soumis à des forces extérieures, et h est relié à la température.[15] C'est entre ces deux chapitres, comme on le discute plus bas, qu'Albert verra un gap qu'il jugera nécessaire de combler (bien que Boltzmann fasse explicitement un lien entre les deux aux sections 34 et 35). Par contre le chapitre V *L'équation de Van der Waals déduite de la notion de viriel* a dû fortement l'intéresser en avril 1901 car Reinganum, qui dans le *Festschrift* faisait fi des dimensions moléculaires, s'appuyait lui aussi sur la notion de viriel pour obtenir l'équation d'état des gaz. On trouve même à la suite de la section 53 *Viriel des forces de cohésion de Van der Waals* une remarque de Boltzmann qui a contribué à la défiance initiale d'Albert Einstein vis-à-vis de ces dimensions.[16] On a vu (*cf.* section 1) que le 4 avril Albert discute avec Michele Besso non seulement des forces moléculaires mais aussi «*de la dissociation*». Or, *Théorie de la dissociation* est le titre du chapitre VI (sections 62 à 73) du tome 2. Pour Boltzmann dans ce chapitre (comme pour Jacobus Henricus van't Hoff), la liaison chimique est décrite de façon continue par une énergie d'interaction proportionnelle aux recouvrements de «*domaines* [orientés] *relativement petits situés sur la surface des atomes*». Il retrouve en particulier les formules d'équilibre chimique de la dissociation d'une molécule diatomique en calculant «*la probabilité* [introduite au chapitre IV] *pour que l'atome considéré soit, d'une façon générale lié à un autre*»; puis il discute l'influence de la pression et de la température et relie la constante

[15] La relation entre h et la température T des gaz parfaits est obtenue par Boltzmann en calculant l'énergie cinétique moyenne des molécules (ou dans une note en calculant l'énergie de vibration moyenne dans les solides avec référence à la loi de Dulong et Petit sur les capacités calorifiques). Aujourd'hui l'exponentielle est écrite $e^{-\varepsilon/kT}$ où la constante k introduite par Planck en 1901 en l'honneur de Boltzmann est reliée à la constante des gaz parfaits R et au nombre d'Avogadro N_A par $k=R/N_A$.

[16] Le viriel est la somme étendue aux molécules des produits scalaires des vecteurs position et force subie (force d'interaction et force modélisant la collision). Avec la loi de Boltzmann, il permet de remonter à l'équation d'état. À la section 54, le souci de rendre cette équation plus générale amène Boltzmann à envisager une dépendance *ad hoc* des températures avec les dimensions moléculaires, ce qui montre effectivement la limite de l'intérêt d'une telle notion.

d'équilibre à la «*chaleur de dissociation*». Ce qui provoque la discussion avec Michele doit être la section 72 *Rapport de cette théorie avec la théorie de Gibbs* où Boltzmann fait référence au livre de Gibbs traduit par Ostwald [35], ainsi qu'aux articles de Planck en 1887 à la base de son ouvrage de 1897 [31] où la dissociation (comme les solutions diluées) est aussi largement traitée. Boltzmann rappelle que pour Gibbs, «*dans un gaz dissocié, toutes les parties constituantes* [la molécule et les atomes séparés] *se comportent de façon indépendante comme des gaz isolés et que leurs énergies, leurs entropies, leurs pressions etc. s'ajoutent*», alors que «*au point de vue moderne que Mach et Ostwald ont développé avec beaucoup de sagacité, on estime que, dans la combinaison chimique, quelque chose de complètement nouveau est simplement venu se substituer aux particules constituantes*». Albert doit avoir été perturbé par cet abandon des particules constituantes (pour des complexes intermédiaires) qui n'est pas dans l'esprit de la vision atomiste habituelle de Boltzmann.[17] À la fin du chapitre, après avoir examiné et rejeté la possibilité de considérer les équilibres gaz-liquide à l'aide d'un modèle analogue à la dissociation (avec des atomes ponctuels et autour de chacun un feuillet sphérique siège d'une attraction forte), Boltzmann conclut par un constat qui a pu constituer pour le jeune Einstein un défi à relever dans sa thèse: «*une représentation mécanique simplement basée sur des forces d'attraction ne faisant pas intervenir les forces de percussion des chocs élastiques, et concordant de toutes pièces avec les faits pour les états fluides, gazeux ou liquides, n'est donc pas encore trouvée*».

À la fin du chapitre III, pour établir un lien avec le chapitre IV, Boltzmann fait à la section 34 un calcul hautement non trivial de 4 pages impliquant les fonctions eulériennes, le genre de calculs qu'il affectionne, mais qui, étant non pédagogique, a certainement échappé à Albert. Boltzmann considère un gaz pour lequel l'énergie cinétique totale L est une forme quadratique quelconque dans les vitesses et

[17] Il est paradoxal que Boltzmann se déclare apparemment aux côtés d'Ostwald et de Mach et pas à celui de Gibbs à qui il a emprunté l'épigraphe du tome 2. Pourtant, dans un article de 1883 sur les équilibres chimiques, Boltzmann en fait une présentation statistique qui conduit aux mêmes résultats que l'analyse thermodynamique avec les potentiels chimiques de Gibbs ([32], pp. 258-268). Cela a contribué pour Albert à penser, comme Niels Bohr plus tard qui lui aussi ne connaissait de Boltzmann que ses *Lectures sur la théorie des gaz*, que «*Boltzmann a gâché* [spoiled] *les choses en insistant sur les propriétés des systèmes mécaniques*» ([29], p. 141).

l'énergie potentielle V ne dépend que des coordonnées. Il montre alors que pour chaque «*momentoïde*» (les «*momentoïdes*», au nombre de μ étant les variables qui diagonalisent L), et dans la limite μ grand (appelée aujourd'hui limite thermodynamique), la loi de probabilité est celle de Maxwell avec une énergie moyenne équirépartie $(E - \bar{V})/\mu$ (E énergie totale fixée et $\bar{V}$ énergie potentielle moyenne). Dans son esprit, il a illustré ainsi le lien existant entre les distributions ergodiques (pour le système total) et celles associées à une température fixée (pour un sous-système).[18] Une discussion physique (section 35), sans calculs, qui n'a pas dû satisfaire Albert, suggère la généralité de ce lien et l'égalité des moyennes temporelles et thermiques. Enfin, au dernier chapitre du tome 2 (sections 74 à 93) qu'Albert n'a pas dû lire avant l'été 1901, Boltzmann revient sur ces questions. Il rappelle en introduction que l'unicité de la distribution de Maxwell a été établie au chapitre I du tome 1 (voir note 5), et, concernant la loi exponentielle du chapitre IV, ajoute que «*nous n'avons pas encore jusqu'à présent démontré complètement, d'une façon tout à fait générale, que ce soit la seule* [stationnaire]». Ceci a dû conforter Albert, quand il l'a lu, dans l'existence d'un gap entre les chapitres III et IV, d'autant plus qu'il n'aurait pas vu l'intérêt des calculs de la section 34 et qu'ensuite, dans le chapitre VII, Boltzmann ne fait qu'étendre aux «*molécules complexes*» la notion de collision faisant passer d'un état moléculaire à un autre, afin de généraliser le théorème H. Même si les remarques faites par Boltzmann à la fin du chapitre sur *Les états* [initiaux] *organisés non probables* (section 87), *Le temps de retour à un ancien état* (section 88), *La relation avec le deuxième principe* (section 89), *La validité du calcul des probabilités en physique moléculaire* (section 90) en relation avec «*la célèbre méthode de*

[18] Il aurait été beaucoup plus simple que son ensemble ergodique soit purement cinétique avec une énergie quadratique dans les moments. Alors, par un argument dimensionnel, le volume dans l'espace de phase correspondant à une énergie inférieure à E est proportionnel à $E^{\mu/2}$ (comme une sphère de rayon $E^{1/2}$ dans l'espace des μ-moments), et le volume de l'espace de phase pour E fixé est proportionnel à $E^{(\mu/2-1)}$ (la surface de la sphère) qui pour μ grand (($\mu \simeq 10^{18}$ pour 10^{-9} mole) est assimilable à $E^{\mu/2}$. (Dans un espace à très grande dimension, tout le volume d'une sphère est concentré sur sa surface!). Si l'un des μ degrés de liberté a l'énergie ε, l'énergie restante pour les autres est $E - \varepsilon$, le volume associé est proportionnel à $(E - \varepsilon)^{\mu/2}$ et la probabilité relative des états d'énergie est proportionnelle à $(1 - \varepsilon/E)^{\mu/2}$ ou aussi (en prenant son logarithme) à $e^{-\mu\varepsilon/2E}$ (loi de Maxwell avec l'énergie moyenne E/μ).

calcul des erreurs de Gauss» et le «*renversement de la suite des temps*», sont toutes des remarques essentielles, elles ne sont pas accompagnées de calculs répondant au problème qu'il a lui-même soulevé en introduction du chapitre. On comprend qu'à la suite de la lecture du tome 2, Albert déclare au début de son premier article de physique statistique: "*Great as the achievements of the kinetic theory of heat have been in the domain of gas theory* […] *one has not yet succeeded in deriving the laws of thermal equilibrium and the second law of thermodynamics using only the equation of mechanics and the probability calculus, though Maxwell and Boltzmann's theories came close to this goal. The purpose of the following considerations is to close this gap*" [7].

Quand en 1902, dans un contexte difficile rappelé plus haut, Albert Einstein se tourne vers la physique statistique, il est un étudiant cherchant à mettre au clair ce qu'il avait lu dans les *Leçons sur la théorie des gaz*, notamment le lien entre les distributions à énergie et température fixée et leur rapport à l'entropie et l'irréversibilité. Il aura besoin pour cela de trois articles,[19] chacun corrigeant en partie et complétant le précédent, avec comme on le verra à la section 5, les quanta à la clé ! Ces articles ont été beaucoup commentés dans la littérature,[20] malheu-

---

[19] Les références à Boltzmann (toutes dans le premier article) concernent les chapitres III et IV du tome 2 (sections 32, 33, 34, 37 et 42) comme attendu. Au début du premier article, Albert fait une démonstration, pour le moins incomplète, du lien entre ces distributions. Elle revient à imaginer un système S caractérisé par une distribution $e^{-2h\varepsilon}$ (il admet donc ce résultat) et un système Σ jouant le rôle de réservoir caractérisé par la distribution e^{-2hH}. Il suppose $H+\varepsilon=E$ fixé (distribution ergodique pour $S+\Sigma$) et ε infiniment petit devant E. Albert établit la relation $2h=\omega'(E)/\omega(E) = 1/2KT$ où $\omega(E)$ est le volume de l'espace de phase de Σ, le lien de h à la température étant obtenu comme à la note 15. Il fait l'hypothèse fausse et non nécessaire aux calculs que S et Σ ont le même nombre de degrés de liberté ; elle est corrigée (avec les mêmes calculs) dans le deuxième article. Le troisième commence avec l'observation que $dS=dE/T$ donne l'entropie $S(E)=2K\ln\omega(E)$. Aujourd'hui on prend comme Boltzmann cette relation comme définition de l'entropie. La probabilité pour le système S d'avoir l'énergie ε est alors comme $\omega(E-\varepsilon)/(\omega(E)=e^{-\varepsilon/2KT}$ compte tenu de la définition de dS. Cette démarche est plus claire que les considérations du jeune Einstein, qui n'est pas en 1902 l'expert qu'il deviendra par la suite.

[20] Voir par exemple [36, 37, 38, 39]. L'article de J. Renn [28] discute en détail «*l'impression d'Einstein qu'il y a en effet un manque* [gap] *dans la théorie des gaz*» et montre que le contenu des articles d'Einstein est déjà dans les travaux de Boltzmann. Renn considère aussi que sa polémique avec Drude sur la théorie des électrons (*cf.* note 8) serait le déclencheur des réflexions d'Einstein sur la physique statistique.

reusement souvent en prenant l'étudiant Albert, avide de comprendre la science contemporaine, pour le savant Einstein formalisant une nouvelle discipline. Einstein reconnaîtra lui-même en 1911, en conclusion de sa réponse dans les *Annalen* à la critique de Paul Herz à leur égard: «*Si j'avais été familier avec le livre de Gibbs à cette époque, je n'aurai aucunement publié ces articles, et je me serais limité au traitement de quelques points*» [40].[21] Ce n'est pas l'objet ici de refaire une analyse de ces articles, ni même, ce qui serait intéressant, de les comparer en détail au contenu des *Leçons* de Boltzmann et des nombreuses références de l'auteur à des travaux antérieurs.[22] Nous nous contentons de faire remarquer que la lecture du livre de thermodynamique de Planck de 1897 (qu'Einstein a déjà pu consulter à propos de la dissociation et dont il parle avec intérêt à Mileva début novembre 1901) a certainement contribué à l'esprit de ces articles. En effet, des concepts classiques de thermodynamique comme la distinction travail-chaleur, la définition de l'entropie par $\delta S=\delta Q/T$ pour une transformation réversible, le lien de l'entropie au potentiel $F=U-TS$, l'importance chère à Planck des fluctuations thermodynamiques, figurent tous en bonne place dans ces trois articles. Cette approche, faisant contrepoids à celle plus théorique et abstraite de Boltzmann a sûrement plu au comité de rédaction des *Annalen*, qui avait en Planck son principal représentant. En 1905, Albert Einstein sera appelé au comité de rédaction des *Beiblätter zu den Annalen der Physik* et réfèrera 8 articles de thermodynamique avant l'envoi de son article sur les quanta en mars, puis 6 autres avant de soumettre celui sur la relativité en juin (dont des articles de van't Hofft, Bryan et Planck).

---

[21] Le livre de Gibbs [33] sort au début de l'année 1902. Même si le 19 septembre 1901 Albert fait part dans sa lettre à Grossmann de premiers calculs éclaircissant Boltzmann (probablement liés au début du premier article de juin 1902) il serait étonnant que jusqu'en 1904 il n'ait pas eu une connaissance même superficielle de ce livre, y compris à travers les retours du comité de rédaction des *Annalen*. On a vu en tout cas que Planck, en juillet 1903, connaissait bien ce livre (dont il avait fait l'analyse détaillée, la même année, pour les *Beiblätter*).

[22] Dans le tome 2, Boltzmann donne en note près de 40 références à ses propres travaux. Les éditeurs des *Collected Papers of Albert Einstein* vol. 2 [CPAE 2] (*cf.* référence [1]) n'excluent pas qu'Einstein ait pu en consulter quelques-unes.

4. «*La séparation essentielle de l'éther lumineux et de la matière*» et la relativité (1898-1905)

À la fin du XIXe siècle, l'éther qui avait été introduit comme milieu de propagation de la lumière devient, pour les physiciens, partie prenante de l'électromagnétisme. Albert Einstein s'est certainement lui aussi posé la question de sa nature quand il rédige, à l'âge de 16 ans, un court article sur *L'état de l'éther dans un champ magnétique*, où il discute l'influence du champ sur la vitesse de la lumière et envisage un lien avec la nature du courant électrique ([13], chapitre IV). Celle, plus philosophique, de l'existence même de l'éther lui est peut-être venue vers 1897-1898 par le livre de mécanique de Mach [41], conseillé par Michele, dans lequel l'auteur écrit que cette «*conception est d'une valeur infiniment plus grande que l'idée surannée d'un espace absolu*». En 1897-1898 Albert est dans sa deuxième année d'études à l'ETH et suit au second semestre les cours d'électromagnétisme de Weber. Ces cours ne discutent pas les théories les plus récentes et, pour les compléter, il lit notamment, comme en témoignent deux lettres à Mileva postérieures au 16 avril 1898, la *Physique de l'éther sur des bases électromagnétiques* de Drude [42], qui est le premier ouvrage d'un auteur allemand présentant la théorie de Maxwell.[23] C'est à l'été 1899 qu'Albert se pose la question du mouvement relatif de l'éther par rapport à la matière qui, dans la littérature contemporaine, fait référence à l'hypothèse d'Augustin Fresnel d'un entraînement partiel de l'éther par la Terre dans son mouvement.[24] Fait unique dans l'ensemble des lettres à

[23] La première édition de *Électricité et Optique* de Poincaré, en deux volumes (1890 et 1891), qui reproduisait ses cours à la Sorbonne, avait été traduite auparavant en allemand par les assistants de Helmholtz à Berlin en 1891 et 1892. La revue pour ingénieurs électriciens *Elektrotechnische Zeitschrift* de 1891 faisait un commentaire élogieux du premier volume où étaient exposées les théories de Maxwell et de Helmholtz, se concluant par «*Il faut ainsi recommander instamment l'ouvrage à tout physicien*». Poincaré est aussi mentionné (avec Boltzmann) à plusieurs reprises, pour ses cours, dans la préface de l'édition originale du livre de Drude de 1894.

[24] En 1818, Fresnel introduit cette thématique pour expliquer l'absence de déplacement du spectre d'une étoile observée par un télescope à différents moments de la nuit ou à différentes périodes de l'année (prisme d'Arago). Ce qui est alors en jeu est la valeur par rapport à l'éther de la vitesse de la lumière de l'étoile dans le prisme en mouvement. Il faut qu'elle ait une expression particulière pour expliquer que l'effet

Mileva, Albert fait début août une très longue suite de remarques scientifiques en rapport avec ce sujet (26 lignes). Elles commencent par: «*J'étudie une nouvelle fois avec la plus grande attention la propagation de la force électrique de Hertz*». Il a déjà consulté ce livre mais n'a pas encore travaillé la partie mathématiquement difficile consacrée à l'électrodynamique des corps en mouvement où l'éther est supposé totalement entraîné par la matière.[25] Il poursuit: «*Je suis de plus en plus convaincu que l'électrodynamique des corps en mouvement, telle qu'elle se présente actuellement, ne correspond pas à la réalité, et qu'il doit être possible de la présenter de façon plus simple. L'introduction du mot «éther» dans les théories de l'électricité a conduit à l'idée d'un «milieu» du mouvement duquel il est possible de parler, sans que l'on soit capable, à mon avis, d'associer une signification précise à ce que l'on dit. Je crois que les forces électriques ne peuvent être définies directement que dans un espace vide, ce que Hertz souligne également*» ([17], L. 8). Puis Albert mentionne deux conceptions différentes de l'électricité; celle de Hertz selon laquelle l'électricité n'est qu'une propriété mathématique associée à la polarisation de la matière (et donc entraînée par elle) et celle selon laquelle «*il faudra considérer les courants électriques* […] *comme un mouvement de masses électriques vraies dont les équivalents chimiques semblent prouver l'existence*». Il fait alors le lien avec la lumière et a probablement en tête une idée d'expérience:[26] «*Les recherches sur le rayonnement indiqueront laquelle de ces deux conceptions doit être choisie. Au fait, je n'ai eu jusqu'à maintenant aucune nouvelle du recteur Wüst. Je*

---

d'aberration la compense exactement [43,44]. Cette vitesse doit être $c/n+V(1-1/n^2)$ où V est la vitesse de la Terre, c celle de la lumière dans le vide et n l'indice de réfraction du prisme. Elle a été vérifiée en 1851 par Hippolyte Fizeau. Elle serait c/n en l'absence d'entraînement de l'éther et $c/n+V$ pour un entraînement total (loi bien connue d'addition des vitesses). Elle explique aux yeux de Fresnel «*que le mouvement de notre globe ne doit avoir aucune influence sensible sur la réfraction apparente*» (invariance des lois de l'optique géométrique !).

[25] À propos de son retour à Hertz, Einstein écrit aussi: «*J'y ai été amené par le fait que je n'ai pas compris le mémoire de Helmholtz sur le principe de moindre action en électrodynamique*». Ce mémoire encore plus technique prend pour variables des circulations et flux élémentaires de champs qui suivent la matière.

[26] Einstein semble ignorer qu'avec la description de la polarisation diélectrique en termes de charges susceptibles de se déplacer, Lorentz a pu expliquer dès 1892 l'entraînement partiel de Fresnel.

vais lui écrire très prochainement».[27] Ces propos très riches, bien qu'un peu allusifs, lui sont certainement venus d'une lecture antérieure de l'article de Wilhelm Wien *Sur les questions relatives au mouvement de translation de l'éther lumineux* [46] cité fin septembre dans la lettre ([17], L. 11). Comme cet article a joué un rôle important pour Einstein, il convient d'en résumer succinctement le contenu. Wien rappelle d'abord la dernière théorie de Helmholtz où l'auteur écrit une équation hydrodynamique pour le vecteur de Poynting associé au courant d'énergie. On comprend alors que début août (avant d'aborder Hertz), Albert disait à Mileva avoir «*bien avancé dans l'étude des mouvements atmosphériques par Helmholtz*»; en effet Helmholtz envisageait que, dans son mouvement, l'éther avait (comme l'air) une inertie négligeable. En prenant en particulier l'exemple d'une charge en mouvement uniforme, Wien montre l'existence d'une vitesse de l'éther et mentionne une expérience, infructueuse, destinée à mettre en évidence l'entraînement de l'éther par des rayons cathodiques, à l'aide d'un réfractomètre de Jamin (une expérience probablement de même nature que celle envisagée par Albert à Aarau). Mais le plus important dans l'article de Wien concerne sa discussion de l'hypothèse de Lorentz d'un éther au repos, dont les seules propriétés sont désormais d'être porteur des champs agissant sur des charges libres de se déplacer (sans être soumis à des forces de leur part), et l'introduction par Lorentz du «*temps local*» dont il donne l'expression mathématique $t'=t-Vx/c^2$.[28] Cette trans-

---

[27] Selon les éditeurs des CPAE 1 (*cf.* référence [17]), Albert Einstein projetait une expérience impliquant des rayons cathodiques avec le directeur de l'*École cantonale* de Aarau où il a été élève en 1895-1896. Il écrit aussi à Mileva: «*À Aarau il m'est venu une idée intéressante pour étudier quelle influence le mouvement relatif des corps par rapport à l'éther lumineux peut exercer sur la vitesse de la propagation de la lumière dans les corps transparents. À ce sujet j'ai pensé à une théorie qui me semble tout-à-fait plausible*» ([17], L. 10). Peut-être s'agirait-il d'une correction à Hertz, qu'il est en train de lire, pour expliquer l'expérience de Fizeau (comme Poincaré, sans y croire, l'avait tenté dans l'*Éclairage Électrique* de 1895 [45]).

[28] Dans son *Versuch* de 1895 [47], pour étudier les diélectriques en mouvement, Lorentz introduit son «*principe des états correspondants*». Soit un système physique au repos dans l'éther composé de charges électriques microscopiques mobiles (de densité ρ) et mettons-le globalement en mouvement à la vitesse V. Lorentz s'intéresse aux variables cinématiques x', t' et de champs, $\overrightarrow{E'}$, $\overrightarrow{B'}$ permettant de ramener son étude à celle du système au repos (mêmes équations de Maxwell au premier ordre en V/c avec les variables primes). Ce principe, ancêtre du principe de relativité, rend ainsi compte du fait qu'un

formation accompagne celle, bien connue, $x'=x-Vt$ dans un changement de référentiel galiléen. Elle explique notamment la formule de Fresnel de manière très simple en supposant l'invariance de la phase d'une onde plane. Wien fait enfin état du succès de la théorie de Lorentz et discute à sa lumière les résultats de treize expériences d'optique et d'électromagnétisme avec des corps en mouvement. Il signale entre autres que l'introduction du temps local explique aussi l'aberration des étoiles dans le cadre ondulatoire (transformation du vecteur d'onde). Wien voit cependant deux limites à la théorie: celle de ne pas obéir au principe de l'action et de la réaction et celle d'être limitée à l'ordre V/c insuffisant pour rendre compte sans hypothèse additionnelle du résultat négatif de l'expérience d'Albert Abraham Michelson à l'ordre V^2/c^2.

«*Comme je serai heureux et fier, lorsque tous les deux ensemble nous aurons mené à bien notre travail sur le mouvement relatif*» ([17], L. 25). Cette phrase est celle qu'Albert Einstein adresse à Mileva le 27 mars 1901, un an et demi après la lecture de Wien. Le printemps 1901 est pour lui à Milan, une période d'intense activité pendant laquelle, on l'a vu, il réoriente sa thèse sur les forces moléculaires avec l'article de Reinganum dans le *Festschrift* pour Lorentz, et comme on le verra à la section 5, où il lit Planck et s'intéresse au rayonnement. Parmi les articles du *Festschrift*, il y a l'article remarquable de Poincaré sur *La théorie de Lorentz et le principe de réaction* [48]. Gustav Mie lui consacre un long résumé en mai dans les *Beiblätter zu den Annalen der Physik* [49]. Max Abraham l'utilisera dès 1902 pour sa réduction de la mécanique à l'électrodynamique. Einstein y reviendra lui-même, en s'y référant, en 1906 [50]. C'est probablement suite à la lecture de cet article de Poincaré que l'on doit une remarque importante d'Albert à Mileva, le 4 avril. À propos de Michele, il rapporte: «*Nous avons discuté de la séparation essentielle de l'éther lumineux et de la matière, de la définition du repos absolu*». Notons que cette phrase sous-entend en particulier que la question d'un rôle mécanique de l'éther n'aurait peut-être

observateur terrestre ne peut en aucune manière, par des expériences électromagnétiques, mettre en évidence au premier ordre en V/c son mouvement par rapport à l'éther. Mais Lorentz considère le temps local («*Ortzeit*») comme une variable «*fictive*» et ne songe aucunement à un temps mesuré par des horloges en mouvement. Il donne de même des lois de transformations pour les champs $\vec{E}' = \vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}$ et $\vec{B}' = \vec{B} - \vec{V} \wedge \vec{E}/c^2$.

plus de sens, de même que celle du repos qui lui est associé. Que contient cet article qui ait pu intéresser Albert?

Poincaré montre d'abord qu'à partir des équations de Maxwell-Lorentz que la quantité de mouvement du système {champ électromagnétique – matière} est conservée si on attribue au champ une densité de quantité de mouvement $\vec{E} \wedge \vec{B}$ ($B=E/c$ pour une onde électromagnétique plane). La loi de l'action et de la réaction est donc satisfaite pour ce système et l'éther ne joue plus de rôle mécanique. Ensuite, en comparant très simplement (sans équation de champ) les théories de Lorentz et de Hertz, Poincaré explique que la théorie de Hertz est contraire à l'expérience de Fizeau (qu'Albert connaît depuis au moins septembre 1899), et qu'elle prédit que si une émission directionnelle de rayonnement se fait dans un milieu, c'est le milieu seul qui compense le recul de l'émetteur. Ce sont tous les espoirs d'Albert de 1899 dans la théorie de Hertz qui s'effondrent (s'il en avait encore) au profit de la théorie de Lorentz. Mais l'article de Poincaré contient aussi l'interprétation du temps local de Lorentz, point qui n'avait été relevé ni par Mie, ni par Abraham [13]. Poincaré donne un sens physique au temps local sur la base d'un processus de synchronisation et de l'invariance de la vitesse de la lumière: «*Je suppose que des observateurs placés en différents points, règlent leurs montres à l'aide de signaux lumineux; qu'ils cherchent à corriger ces signaux du temps de la transmission, mais qu'ignorant le mouvement de translation dont ils sont animés et croyant par conséquent que les signaux se transmettent également vite dans les deux sens, ils se bornent à croiser les observations, en envoyant un signal de A en B, puis un autre de B en A. Le temps local est le temps marqué par les montres ainsi réglées*».[29] La variable fictive devient ainsi un véritable temps. Cette expérience de pensée de Poincaré est analogue à celle d'Einstein de juin 1905 comme on le verra à la fin de cette section. Enfin, l'article de Poincaré du *Festschrift* contient une autre expérience de pensée, proche elle aussi [51], de celle qu'envisagera Einstein en

[29] En effet, si un signal lumineux émis par A est reçu par B distant de l à l'instant $t'=l/c$ (pour lui), alors dans le référentiel R, où B fuit le signal à la vitesse V, une horloge au repos marque le temps $t=l/(c-V)$ à cette réception. Cela conduit immédiatement à la relation $t'=t-Vx/c^2$. En toute rigueur, les temps de propagation de A vers B et B vers A valent $\Delta t\pm=l/(c\mp V)$ dans R avec $\Delta(x-Vt)\pm=\pm l$ et sont égaux dans R'. Si on pose $t'=at+b(x-Vt)$, un calcul élémentaire conduit à $t' = a\left(t - \frac{V}{c^2-V^2}(x - Vt)\right)$. Au premier ordre en V/c, et sachant que $t'=t$ si $V=0$, on retrouve le temps local de Lorentz de 1895.

septembre 1905 [5]. Un oscillateur hertzien en mouvement dans l'éther émet un train d'onde lumineux de longueur L. Poincaré s'intéresse au recul de l'émetteur dans ce référentiel R et dans un autre R'. À partir des transformations de Lorentz de 1895 pour les coordonnées, il obtient la longueur $L'=(1+V/c)L$ dans R', puis à partir des transformations des champs, il obtient l'énergie du train d'onde $E'=(1-V/c)E$ dans R'.[30] Comme la quantité de mouvement du train d'ondes est reliée à son énergie par $p=E/c$, Poincaré fait remarquer que le recul de l'émetteur E/c dans R diffère de celui dans R' ce qui est contraire à l'invariance des forces en Mécanique dans un changement de référentiel galiléen. Sa remarque porte en germe l'inertie de l'énergie. Si m est la masse de l'émetteur, les bilans de quantité de mouvement dans R et dans R' sont respectivement $\Delta(mv)= -E/c$ et $\Delta(m(v-V))= -E/c$, et ils impliquent $\Delta m= -E/c^2$, E étant l'énergie emportée par le rayonnement, et donc perdue par l'émetteur. Mais Poincaré l'interprète alors comme la force supplémentaire de Liénard. En 1906 [50], Einstein s'intéressera, comme Poincaré en 1900, à la conservation du mouvement du centre de masse d'un système matériel émettant et absorbant de l'énergie, et corrigera Poincaré à la lumière de son article de septembre 1905, où il a introduit l'inertie de toute forme d'énergie $\Delta E=(\Delta m)c^2$ [5].

À Kyoto en 1922, alors qu'il s'exprime en conférence sur ses premières idées sur la relativité, Einstein fait mention – pour la seule et unique fois – d'une expérience qu'il avait envisagée avant 1905. Il ne donne pas de date, mais nous allons voir qu'il s'agit de la période sep-

---

30 Arthur Miller note à ce propos que «*Poincaré a été le premier à obtenir* [to deduce] *la loi de transformation d'une impulsion lumineuse*» [52]. Comme l'effet Doppler pour la fréquence donne $\nu'=(1-V/c)\nu$, une conséquence implicite des calculs de Poincaré est que E se transforme comme ν au premier ordre en V/c. Poincaré ne commente pas ce résultat, mais pour lui l'invariance de E/ν ne doit pas être étonnante ; elle est en effet une conséquence du théorème adiabatique dont il parle dans ses cours de *Thermodynamique* [53]. On sait à quel point cette invariance a été importante pour Einstein qui la généralise à tout ordre en 1905: «*Il est digne de noter que l'énergie et la fréquence d'un complexe lumineux se transforment selon la même loi*» [4] («*un des grands euphémismes* [understatements] *de l'histoire des sciences*» d'après Miller [54]). En effet, cette invariance prend tout son sens quand on la rapproche des quanta d'énergie introduits par Planck le 15 décembre 1900 devant l'académie à Berlin. D'un point de vue rétrospectif, il est remarquable que l'article de Poincaré et la communication de Planck se fassent à quatre jours près (le 11 décembre pour le *Festchrift*) !

tembre – décembre 1901, entre Milan et Schaffhouse. Il rappelle: «*Je souhaitais alors vérifier moi-même le flot d'éther par rapport à la Terre. La première fois que j'ai pensé à ce problème, je ne doutais pas de l'existence de l'éther ou du mouvement de la Terre à travers lui. J'ai pensé à l'expérience suivante utilisant deux thermocouples: plaçons des miroirs de sorte que la lumière d'une source unique soit réfléchie dans deux directions, l'une parallèle au mouvement de la Terre et l'autre antiparallèle. Si l'on suppose qu'il y a une différence d'énergie dans les deux faisceaux réfléchis, on peut mesurer la différence dans la chaleur produite en utilisant deux thermocouples. Bien que cette expérience soit très similaire à celle de Michelson, je ne l'ai pas réalisée*» [55]. Or en septembre 1901, toujours de Milan, Einstein s'ouvrait déjà à son ami Marcel Grossmann d'une idée d'expérience: «*Une méthode considérablement plus simple pour mettre en évidence le mouvement relatif de la matière par rapport à l'éther lumineux, qui est basée sur les expériences ordinaires d'interférences m'est soudain venue à l'esprit*» (voir CPAE 1, pp. 290-291). Le sujet réapparaît dans les lettres à Mileva, le 17 décembre. Albert lui écrit: «*Je travaille d'arrache-pied à une électrodynamique des corps en mouvement qui promet de devenir un article capital*». Parlant de Kleiner (son directeur de thèse), il ajoute: «*Je veux absolument l'amener à me laisser travailler pendant les vacances de Noël*» ([17], L. 46). Deux jours plus tard, il expose ses idées à Kleiner et fait part à Mileva de la satisfaction de son directeur pour son travail: «*Il m'a conseillé de publier mes idées sur la théorie électromagnétique des corps en mouvement, méthode expérimentale y compris. Il a trouvé que la méthode expérimentale que je propose est la plus appropriée et la plus simple que l'on puisse imaginer. J'étais très content de mon succès. Je compte bien rédiger mon article dans les semaines qui viennent*». Albert sait pouvoir bénéficier à Zurich de laboratoires de pointe en physique et il connaît bien les thermocouples (thermopiles).[31] Tenter cette expérience, en lien avec l'article «*capital*» sur le «*mouvement relatif*», aurait pu être son objectif pendant les vacances de Noël. Quant aux calculs précis sur lesquels est basée cette

[31] Les thermocouples reposent sur l'apparition d'une tension entre les extrémités d'une jonction de deux métaux différents portées à des températures différentes. En assemblant plusieurs centaines de thermocouples en série, on obtient une *thermopile* (Leopoldo Nobili), dont la tension est mesurable par des appareils très sensibles. Cette dernière a été popularisée par Macedonio Melloni et figure alors dans tout catalogue de matériel de laboratoire pour la mesure de rayonnement infrarouge.

expérience, on ne le saura jamais. Mais ils sont assurément en lien avec la théorie de Lorentz de 1895 car le 28 décembre, Einstein écrit à Mileva qu'il a «*maintenant l'intention d'étudier ce que Lorentz et Drude ont écrit sur l'électrodynamique des corps en mouvement. C'est Ehrat qui doit me faire parvenir les livres*» ([17], L. 48). On peut même penser qu'ils sont liés aux calculs sur la transformation des grandeurs énergétiques en électromagnétisme, comme le fait par exemple Liénard dans *L'éclairage électrique*, une revue lue par les ingénieurs électriciens, ou Poincaré dans la seconde édition de *Electricité et optique* [56].[32] En particulier dans le chapitre VI où il établit l'équivalence des équations dans l'éther et dans un référentiel en mouvement (voir note 32), Poincaré ajoute la remarque suivante: «*On pourrait faire une objection à la conclusion que nous venons de faire: on pourrait dire que si la position des franges n'est pas modifiée, il ne résulte pas de là que leur intensité ne le soit pas; et si l'on pouvait mesurer cette variation d'intensité on aurait un moyen pour déceler le mouvement de la terre par des phénomènes optiques. Mais nous allons voir qu'il n'en est rien: il y a impossibilité matérielle de mesurer une pareille variation d'intensité*». Cette affirmation (étonnante) a pu être vue comme un défi à relever pour un jeune étudiant comme Albert travaillant sur le sujet. L'effet relatif en V/c vaut 2×10^{-4} et ne peut donc pas être détecté par des plaques photographiques. Mais comme il pourrait l'être par des thermopiles, Einstein peut avoir pensé à une expérience mettant quand même en évidence le mouvement relatif de la Terre. On comprend ainsi rétrospectivement mieux le contenu de la lettre à Grossmann (et les «*fausses pistes*» évoquées par Besso, voir section 1).

Il semble donc que fin 1901, Albert Einstein pense encore au mouvement relatif de l'éther et de la matière et que, comme la presque totalité des physiciens, il n'a pas encore prêté complètement attention

---

[32] Poincaré y expose les théories électrodynamiques récentes avec une attention particulière pour la théorie de Lorentz de 1895. En particulier, il consacre le chapitre VI (516-536) aux *Phénomènes optiques dans un corps en mouvement* et le chapitre VII (537-543) à *L'influence du mouvement de la Terre sur les phénomènes électriques proprement dits*. Il démontre notamment dans le chapitre VI que dans cette théorie les phénomènes optiques ne sont pas modifiés au premier ordre en V/c par le déplacement de la Terre, ce qu'il traduit sous la forme d'un «*théorème*» selon lequel «*Le mouvement de la terre n'influe pas sur les phénomènes optiques si on néglige les carrés de l'aberration* [V^2/c^2]». Ainsi, par exemple, les phénomènes d'interférences sont-ils identiques pour l'observateur terrestre, à cet ordre d'approximation, que la Terre soit en mouvement ou au repos dans l'éther.

au temps local de Lorentz interprété par Poincaré dans le *Festschrift*. Après 1902, dans le cadre de l'*académie Olympia*, qui regroupe autour de lui ses amis Maurice Solovine et Conrad Habicht, Albert a l'occasion d'étudier *La science et l'hypothèse* de Poincaré [57] «*un livre qui nous a profondément impressionnés et tenus en haleine pendant de longues semaines*» d'après Solovine [58]. Poincaré y écrit au chapitre VI qu'«*il n'y a pas de temps absolu*» et qu'on ne peut pas parler sans convention préalable de simultanéité «*sur des théâtres différents*». Albert Einstein ne voit certainement pas encore en 1902 les transformations de Lorentz de 1895 comme une relativité au premier ordre [59].[33] Mais les discussions sur *La science et l'hypothèse* et le souvenir de l'interprétation du temps local par Poincaré en 1900 dans le *Festschrift* vont revenir soudainement au printemps 1905, quand, avec Michele Besso (qu'il remercie, chose exceptionnelle, à la fin de son article de juin) il repense à la notion de temps. La raison, qui nous semble-t-il n'a pas encore été signalée, est que Lorentz a introduit en 1904 une nouvelle expression du temps local qui va être reproduite dans les *Beiblätter* de la seconde quinzaine du mois de février [60]. Or Einstein, comme on l'a vu, est rapporteur dans cette revue et il publie huit notes de lectures dans le numéro de la quinzaine suivante. Il a donc dû prendre connaissance au plus tard en mars 1905 de l'expression:

$$x' = kx\,; \quad t' = \frac{t}{k} - \frac{kVx}{c^2}\,; \quad k^2 = \frac{c^2}{c^2 - V^2}$$

[lire (x-Vt) à la place de x comme dans Lorentz 1895]. Un indice que l'article de juin 1905 a pour origine la découverte par Einstein de cette formule de Lorentz est que la toute première étape de sa démonstration le conduit à l'expression analogue, la constante a étant déterminée par la suite.[34] Cette première étape consiste à examiner l'aller-retour entre deux miroirs d'un faisceau lumineux dans le référentiel des miroirs et dans un référentiel quelconque. Einstein, pour retrouver le temps local

[33] Les transformations de Lorentz de 1895 sont la forme infinitésimale de celles de 1904. Tous les résultats obtenus avec elles concernant l'optique (Fresnel) et l'électromagnétisme (Lorentz, Poincaré) relèvent donc d'une relativité au premier ordre qui sera bien connue d'Einstein en juin 1905 ([4], introduction).

[34] Dans l'établissement des transformations de Lorentz à partir de l'invariance de c, aucun livre d'enseignement ne passe plus aujourd'hui par cette première étape.

de 1904, adapte donc la méthode esquissée par Poincaré en 1900 [48] pour retrouver le cas plus simple de 1895 (voir note 29). Comme il le dira en 1907 [61] «*Il suffisait de réaliser qu'une quantité auxiliaire introduite par H. A. Lorentz et appelée par lui temps local pouvait être définie comme le temps en général*». La période mars-avril 1901, avec la lecture du *Festschrift* pour Lorentz à Milan, apparaît de ce point de vue déterminante pour l'article de juin 1905.

5. Les quanta sortis d'«*un océan d'obscurité*» avant 1905?

Michele Besso fait remonter, comme nous l'avons vu à la section 2, à 1895 ses premières discussions avec Albert Einstein sur la nature de la lumière «*entre Newton et Huygens*», soit entre particules et ondes. Les lectures d'Albert vers 1897-1898 du livre de Drude sur l'électromagnétisme et l'éther [42], ou des *Wärmelehre* de Mach où sont discutées les propriétés du corps noir, abordées aussi dans son cours par Weber (qui avait expérimenté sur le sujet), l'ont certainement convaincu que la théorie ondulatoire électromagnétique répond totalement aux faits observés. C'est à propos de l'interaction du rayonnement avec la matière que de nouvelles réflexions d'Albert vont s'enchaîner rapidement, au printemps 1901, à Milan, en liaison avec les lectures de Planck, Poincaré et Lenard. Le 23 mars, il fait part à Mileva d'une «*idée originale*» pour relier la chaleur spécifique des corps et leur absorption du rayonnement: «*En effet, il ne me semble pas exclu que l'énergie cinétique latente de la chaleur dans les solides et les liquides puisse être considérée comme de l'énergie électrique de résonateurs. Dans ce cas, la chaleur spécifique et le spectre d'absorption des solides devraient être liés. La loi de Dulong et Petit vaudrait pour les substances dont les plus petites parties présenteraient une certaine résonance totale au sens électro-optique du terme*» ([17], L. 24). Albert donne ensuite des exemples de corps opaques satisfaisant à cette loi et demande à Mileva de lui trouver des informations sur le verre. Dans cet esprit, le 27 mars, il envisage de collecter des données sur les coefficients d'absorption des métaux déduits d'expériences sur la réflexion métallique des ondes.[35]

[35] Dans le *Festschrift*, il y a un article de Dimitrij A. Goldhammer sur la pression du rayonnement où ce sujet est discuté [62].

Dans ces propos, Albert fait état implicitement de connaissances approfondies concernant la théorie de la dispersion, qui rend compte de l'indice et du coefficient d'absorption d'un milieu. Dans cette théorie purement électromagnétique, un dipôle est soumis à la force électrique du rayonnement, ce qui conduit à une polarisation du milieu qui affecte la propagation de la lumière. Dans les corps transparents, la fréquence propre d'oscillation du dipôle est beaucoup plus grande que celle de la lumière et Albert peut penser (comme il le discutera six ans plus tard) que les résonateurs ne participent pas à la chaleur spécifique (car ils ne seraient pas excités). Si les fréquences sont comparables, l'oscillateur entre en résonance, et, comme il possède un coefficient d'amortissement, le milieu absorbe l'énergie lumineuse. *A priori* cette théorie de la dispersion est indépendante de celles introduites en thermodynamique pour rendre compte des chaleurs spécifiques à partir des mouvements moléculaires de translation, de vibration (voire des mouvements mécaniques internes) comme Albert l'a appris chez Weber et Boltzmann. En fait, ces résonateurs sont ceux qu'il a découverts dans le traitement du corps noir par Planck. Comme souvent dans les lettres, ce n'est qu'après leur formulation qu'on s'aperçoit que les idées d'Albert sont liées à des lectures antérieures. Le 4 avril, il fait part à Mileva de «*quelques réserves de principe à propos des études de Max Planck sur le rayonnement, ce qui fait que je lis son traité avec des sentiments mitigés*»; et, deux phrases plus loin, parlant d' «*une étude de Paul Drude sur la théorie des électrons*»: «*Lui aussi suppose que ce sont avant tout des corpuscules électriques négatifs sans masse pondérable qui conditionnent les phénomènes thermiques et électriques dans les métaux*» ([17], L. 26). Or Planck, dans son traitement du corps noir, considère effectivement une limite de masse nulle pour ses oscillateurs, dont il ne précise pas la nature physique.[36] Le 10 avril, Albert revient sur Planck:

[36] L'approche du corps noir par Planck repose sur la formule $u(\nu)=(8\pi\nu^2)/c^3\,)U$ qui relie la densité spectrale volumique du rayonnement à l'énergie moyenne d'un résonateur de fréquence ν. En partant de l'équation d'un dipôle p oscillant en présence du champ électrique E de la lumière, qu'on peut écrire $m\ddot{p}+f\dot{p}+m\omega_0^2 p=0$ [63], Planck fait le calcul (très classique) de l'énergie moyenne U de l'oscillateur et de la puissance absorbée. En identifiant cette puissance à celle rayonnée par le dipôle, il obtient le coefficient de friction (analogue à la résistance électrique d'une antenne): $f=(12\varepsilon_0\,)^{-1})\,(8\pi\nu_0^2)/c^3$. (C'est à ce calcul qu'il se limite dans le bref article du *Festschrift* pour Lorentz). Pour aborder le corps noir (rayonnement en équilibre thermique), Planck considère un champ E

«*Planck suppose qu'une catégorie bien déterminée de résonateurs (de période et d'amortissement bien déterminés) conditionne les transferts de l'énergie du rayonnement – hypothèse que j'ai du mal à faire mienne. Peut-être sa toute dernière théorie est-elle plus générale. J'ai justement l'intention de m'y attaquer*» ([17], L. 27). La mention d'un amortissement non nul fait référence à une nouvelle lecture (non citée directement à Mileva), celle de l'article de Planck du *Festchrift* [64] (qu'il consulte comme on l'a vu à cette période à la bibliothèque de l'*Institut lombard*). Albert n'a certainement pas saisi en mars 1901 le rôle des résonateurs de Planck. Il les pense attachés à la matière, d'où leur influence possible sur la chaleur spécifique. Mais dans l'esprit de Planck, ils concernent aussi le rayonnement puisque leur énergie moyenne est reliée à la densité volumique spectrale (voir note 36). Il est remarquable que Planck postule une relation analogue pour les entropies $s(\nu)$ et $S(U)$ du rayonnement et des résonateurs respectivement. Cela le conduit en 1899, à partir de la loi de Wien du rayonnement du corps noir, à donner pour U une expression qui n'est pas kT comme pour un oscillateur mécanique. Planck n'en est pas surpris car il s'agit de la lumière et qu'il connaît beaucoup d'autres exemples observés pour la matière.[37] Début 1901, à partir de la loi qui porte son nom, il déduit une nouvelle expression de $S(U)$ et a l'idée de lui appliquer la définition de Boltzmann de l'entropie $S=k \ln W$ pour obtenir et interpréter W. Planck réfère à l'article de Boltzmann de 1877 mentionné par ce dernier dans ses *Leçons sur la théorie des gaz* (voir section 3). C'est ainsi qu'il est conduit à la condition nécessaire de quantification (bien connue) des énergies des résonateurs $\varepsilon_n=nh\nu$.[38] C'est «*la toute dernière*

chaotique (l'analogue pour le rayonnement de l'hypothèse de chaos moléculaire pour les gaz). Il calcule la puissance volumique spectrale absorbée qu'il relie à l'énergie moyenne d'un oscillateur. Dans la relation finale entre $u(\nu)$ et U, la masse m et le coefficient d'amortissement f disparaissent. Mais pour que ce qui est absorbé soit intégralement émis, il faut faire tendre f vers zéro, et donc m aussi puisque le rapport est relié à la largeur spectrale de la raie. Les résonateurs chez Planck sont donc des passeurs d'énergie lumineuse, pas des thermostats! Albert n'a certainement pas saisi cette subtilité du raisonnement de Planck - ce qui sera un des moteurs pour l'inciter à trouver une autre interprétation.

37 Par contre, cela choquera encore Einstein dans son article de mars 1905.

38 Il avait, sans le savoir, découvert que les «*thermoéléments*» de la lumière ne sont pas des modes classiques du rayonnement (auquel cas on aurait $U=kT$ comme le pensait Jeans en 1900) mais des modes quantiques. Aujourd'hui, encore beaucoup de

théorie» dont parle Albert à Mileva le 10 avril. Elle paraît dans le numéro 4 des *Annalen der Physik* [66], celui qui voit paraître l'article d'Albert sur la capillarité.

Le 10 avril toujours, Albert déclare à Mileva: «*mes intuitions sur la nature du rayonnement ont de nouveau sombré dans un océan d'obscurité. Peut-être l'avenir nous apportera-t-il une solution plus raisonnable*». L'idée de corpuscules lumineux associés à une portion d'onde, dans une vision dualiste de la lumière «*entre Newton et Huygens*», est celle qui l'accompagne probablement depuis 1895. La vision de Planck des quanta, avec des oscillateurs statiques (quels qu'ils soient) ne peut être la sienne. Qu'elle n'a pas dû être sa surprise en lisant dans le *Festchrift* l'article de Poincaré, s'il a remarqué que ses calculs impliquaient que l'énergie d'un train d'onde se transforme comme la fréquence (*cf.* note 30), une façon d'associer énergie et fréquence tout en préservant l'idée de mobilité pour la lumière. Un train d'onde plane est ce qu'Einstein appellera «*complexe lumineux*» en 1905; si sa longueur est de l'ordre de la longueur d'onde, il fournit un modèle rudimentaire de quanta, comme il le reconnaîtra dans sa conférence de Salzbourg de 1909 [67]. Le 30 avril, Albert déclare à Mileva: «*Dernièrement, l'idée m'est venue que, lors de la production de la lumière, il pourrait y avoir transformation directe de l'énergie cinétique en lumière, du fait du parallélisme Force vive de la molécule/Température absolue/spectre (énergie spatiale de rayonnement à l'équilibre). Qui sait quand un tunnel pourra être creusé dans ces montagnes dures comme le roc* !» ([17], L 29). Il est possible qu'Albert fasse ici référence aux travaux de Wien de 1896 qui faisaient état d'une proportionnalité entre l'énergie cinétique des molécules et la fréquence du rayonnement qu'elles engendrent dans l'éther; peut-être aussi s'agit-il d'une relecture de Planck qui, en 1900, notait que la température déterminait à la fois «*l'activité principale des molécules*» et «*l'intensité du rayonnement*» ([17], note 7 L 29). Le mois suivant, alors qu'il effectue un remplacement en tant qu'enseignant à l'*École technique de Winterthur*, Albert prend connaissance de l'article expérimental de Lenard dans les *Annalen* sur l'effet

---

physiciens non spécialistes de la théorie quantique des champs résument les quanta à des photons (avec une statistique de Bose-Einstein) alors que l'objet qui répond à la loi de Boltzmann $e^{-\varepsilon/kT}$ est le mode quantique. Avec $\varepsilon_n = nh\nu$, on a $U = h\nu/(e^{h\nu/kT} - 1)$ comme l'avait obtenu Planck [65]. On retrouve $U = kT$ à basse fréquence.

photoélectrique qui a le don de le remplir d'allégresse: «*Je viens juste de lire un article formidable de Lenard sur la production de rayons cathodiques par la lumière ultraviolette. Ce morceau de choix m'a fait une telle impression, il me met dans un tel bonheur et une telle joie qu'il faut absolument que je t'en fasse profiter*» ([17], L 36). Les expériences de Lenard, menées sous un vide poussé, prouvent que les électrons sont arrachés à la cathode métallique par la lumière ultraviolette (et qu'ils ne proviennent pas de l'ionisation du gaz résiduel). L'énergie du rayonnement est donc transmise aux électrons, une sorte de processus inverse de celui pensé par Wien pour les molécules. Il est clair qu'au printemps 1901, comme montré dans [12], une idée des quanta a dû apparaître à Albert Einstein. On peut même imaginer comment elle est arrivée qualitativement à partir des lois du corps noir et du lien quanta – complexe lumineux. Si le quanta a un volume typique $V \sim \lambda^3$, la loi de Stefan pour l'énergie du corps noir $E \propto VT^4$ et celle de Wien λT=cste (pour le maximum de la courbe de rayonnement du corps noir en fonction de la fréquence $\nu = c/\lambda$) conduisent effectivement à $\varepsilon \propto \nu \propto T$ pour l'énergie d'un quanta. Comme on le verra plus loin, Albert reprendra en 1904 sans le dire cette conception des quanta; mais pour prouver qu'ils sont libres de se déplacer, il faudra un argument quantitatif. C'est l'objet de l'article de mars 1905 [1] qui établit (dans le cadre restreint de la loi de Wien) que la dépendance volumique de l'entropie d'un rayonnement de fréquence ν et d'énergie E est comme celle d'un gaz de N particules avec $E/N = h\nu$.[39] Comme on le sait, Einstein applique ensuite son résultat à la production et à la transformation de la lumière, et en particulier à l'effet photoélectrique, ce qui lui vaudra le prix Nobel de physique en 1922.

Entre fin 1901 et mars 1905, il y a eu comme on l'a vu (section 3) le passage par la physique statistique suite à la lecture de Boltzmann

---

[39] À partir de la loi de Wien qu'il écrit $\rho = \alpha\nu^3 e^{-\beta\nu/T}) = E/V$ ($\beta = h/k$ pour Planck à partir de 1901) Einstein obtient la dépendance volumique de l'entropie du rayonnement $S - S_0 = (E/\beta\nu) \ln V/V_0$ qu'il compare, de fait, à celle d'un gaz parfait $S - S_0 = N(R/N_A) \ln V/V_0$. Tout se passe donc comme si on avait pour la fréquence ν, des particules ayant chacune l'énergie $E/N = \beta\nu R/N_A$ ($= h\nu$ avec les notations de Planck qu'Einstein ne reprend pas). Pour faire référence à l'approche statistique de Boltzmann (et néanmoins s'en distinguer), il affirme qu'il est évident que la probabilité statistique pour qu'un gaz de N particules occupe le volume V quand on lui a offert le volume V_0 est $(V/V_0)^N$, d'où il retrouve l'expression de $S - S_0$ pour un gaz.

notamment. Dans le troisième et dernier article [9], Albert met un point final à son interprétation statistique de l'entropie, d'une part en retrouvant l'expression de Boltzmann $S=2\mathrm{K}\ln\omega(E)$ (*cf.* note 19) pour un énergie E donnée, d'autre part en montrant qu'à température fixée, la probabilité de Boltzmann pour un système macroscopique est comme $\exp(S-E/T)/2K$ où $\exp S/2K=\omega(E)$ est le nombre d'états microscopiques associé à E. À partir de là, il établit au §5 pour les fluctuations d'énergie la relation $(\Delta E)^2=2KT^2d\overline{E}/dT$ où $\overline{E}$ est l'énergie moyenne. Albert ne cite pas Gibbs, qui dans son ouvrage [33] annonce au début du chapitre VII qu'il va calculer toutes les valeurs moyennes des puissances de l'énergie, et donne la même relation trois pages après.[40] Planck le connaît (*cf.* section 3) mais les fluctuations sont son domaine. On les trouve dans son livre de 1897, et dans plusieurs articles de 1900 qu'il a écrits sur le corps noir. De son côté, Albert était extrêmement proche de ce résultat au §6 de son premier article [7], et comme Planck, il est intéressé par le rayonnement. Il n'est donc pas étonnant que le dernier paragraphe porte sur ce sujet. Albert dit même en introduction que l'«*espace vide rempli de rayonnement thermique*» est le seul «*pour lequel on peut conjecturer à partir de l'expérience qu'il manifeste une fluctuation d'énergie*». Il précise que pour cela le volume de l'espace considéré doit avoir une dimension de l'ordre de la longueur d'onde λ. Dans ce cas, dit-il, les fluctuations d'énergie ΔE sont de l'ordre de l'énergie moyenne $\overline{E}$; mais en raison de la loi de Stefan $\overline{E}\propto VT^4$, cela entraîne que VT^3, donc que λT est une constante, ce qui n'est autre que la loi de Wien (Albert donne même une valeur numérique). Il reconnaît que son propos est heuristique, mais il ne dit pas que si ΔE est de l'ordre de $\overline{E}$, c'est qu'il a pensé à un volume qui correspond à un quanta.[41] Ce calcul n'est guère différent de celui indiqué ci-dessus, qu'il a pu faire au printemps 1901, en discutant avec Michele Besso; le fait qu'il arrive de manière un peu impromptue à la fin d'une série de trois articles qui ne visaient pas le corps noir, n'est certainement

---

[40] Le §5 de [9] se termine par "the magnitudes of $\overline{\varepsilon}^3$, $\overline{\varepsilon}^4$, etc. can be calculated by successive differentiations without any difficulty". Pour Albert, l'important n'est pas dans les mathématiques mais dans les applications physiques. Mais cette remarque est aussi une preuve indirecte de sa connaissance de Gibbs.

[41] Pour un gaz monoatomique $\overline{E}=3/2\,NkT$, donc $(\Delta E)^2=kT\overline{E}$; demander $\Delta E\simeq\overline{E}$ n'est autre que faire $N=1$.

pas étranger à l'arrivée de Michele à Berne au Bureau des brevets au côté d'Albert début 1904. Ce rôle moteur de Michele est attesté par son témoignage le 17 janvier 1928, quand il lui écrit: «*De mon côté, j'ai été ton public pendant les années 1904 et 1905; en t'aidant à rédiger tes communications sur le problème des quanta je t'ai privé d'une partie de ta gloire, mais en revanche, je t'ai procuré un ami, Planck*» ([14], p. 141). Elle contient une conclusion très forte, «*un ami, Planck*». C'est ce qui permettra notamment à Albert de devenir rapporteur pour les *Beiblätter* dès le début de l'année 1905. Nous avons vu (section 4) toute l'importance que cela entraînera quelques semaines plus tard, avec la connaissance de la nouvelle formule de Lorentz pour le temps local. Finalement, les réflexions du printemps 1901 et le passage par la physique statistique, ont été à l'origine de l'*Annus Mirabilis* de 1905 et d'un tournant dans la carrière scientifique d'Albert, qui devient Einstein.

RINGRAZIAMENTI

Nous remercions le Professeur Silvio Beretta, Président de l'*Institut lombard*, *académie des sciences et des lettres*, et le Professeur Gianpiero Sironi, Président honoraire de l'*Institut*, pour leur invitation à venir présenter ce travail. Nous remercions également les professeurs Oreste Nicrosini et Carlo Domenico Pagani pour la présentation de la communication et le suivi de la publication. Tous nos remerciements à Madame Matelda Lo Fiego, pour son aimable traduction en italien du résumé.

BIBLIOGRAPHIE

1. A. Einstein, Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt, *Annalen der Physik,* 1905: 17: 132-148; in *The Collected Papers of Albert Einstein*, *vol.2, The Swiss years: Writings, 1900-1909* [*CPAE 2*], J. Stachel, D. C. Cassidy, J. Renn et R. Schulmann éditeurs, 150-166, Princeton University Press, Princeton, 1989.
2. A. Einstein, Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen, *Annalen der Physik,* 1905: 17: 549-560; in *CPAE 2*, 224-235.
3. A. Einstein, *Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen*, K. J. Wyss, Berne, 1905; in *CPAE 2*, 184-202.
4. A. Einstein, 1905. Zur Elektrodynamik bewegter Körper, *Annalen der Physik,* 1905: 17: 891-921; in *CPAE 2*, 276-306.

5. A. Einstein, Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieeinhalt abhängig? *Annalen der Physik,* 1905: 18: 639-641; in *CPAE 2*, 312-314.
6. J. Stachel, *Einstein's Miraculous Year: Five papers that changed the face of physics*, Princeton university press, Princeton, 2005.
7. A. Einstein, Kinetische Theorie des Wärmegleichgewichtes und des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik, *Annalen der Physik,* 1902: 9: 413-433; in *CPAE 2*, 57-73.
8. A. Einstein, Eine Theorie der Grundlagen der Thermodynamik, *Annalen der Physik,* 1903: 11: 413-433; in *CPAE 2*, 77-94.
9. A. Einstein, Zur allgemeinen molekularen Theorie der Wärme, *Annalen der Physik,* 1904: 14: 354-362; in *CPAE 2*, 99-107.
10. A. Einstein, Folgerungen aus den Capillaritätserscheinungen, *Annalen der Physik,* 1901: 4: 513-523, in *CPAE 2*, 10-20.
11. A. Einstein, Ueber die thermodynamische Theorie der Potentialdifferenz zwischen Metallen und vollständig dissociirten Lösungen ihrer Salze und über eine elektrische Methode zur Erforschung der Molecularkräfte, *Annalen der Physik,* 1902: 8: 798-814; in *CPAE 2*, 23-39.
12. R. Rynasiewicz, J. Renn, The turning point for Einstein's *Annus mirabilis*, *Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 2006: 37: 5-35.
13. C. Bracco, *Quand Albert devient Einstein*, CNRS Editions, Paris, 2017; trad. *Quando Albert diventò Einstein. Gli anni italiani 1895-1901*, Pisa University Press, Pisa, 2019.
14. *Albert Einstein-Michele Besso*, *Correspondance: 1903 -1955*, P. Speziali, Herman, Paris, 1979.
15. A. Einstein, Notes for an Autobiography, *The Saturday Review of Literature*, 26 November 1949.
16. C. Bracco, J.-P. Provost, Les années italiennes du jeune Einstein, la thèse oubliée sur les forces moléculaires, Reflets de la *physique*, 2018:56: 31-34. < https://doi.org/10.1051/refdp/201856031>
17. *Albert Einstein, Mileva Marić, Lettres d'amour et de science*, J. Renn, R. Schulmann, Seuil, Paris, 1993; in *The Collected Papers of Albert Einstein*, *vol.1, The early years, 1879-1902* [*CPAE 1*], J. Stachel, D. C. Cassidy et R. Schulmann éditeurs, Princeton University Press, Princeton, 1987.
18. A. Païs, *Subtle is the Lord: the science and life of Albert Einstein*, Clarendon, Oxford, 1982.
19. C. Bracco, Einstein and Besso: from Zürich to Milan, *Istituto Lombardo (Rend. Scienze)*, 2014: 148: 285-322: < http://www.ilasl.org/index.php/Scienze/article/view/178>.
20. C. Bracco, Albert Einstein and the Marangoni family, *SISFA, Atti del XXXVII Convegno, B.* Campanile, L. De Frenza, A. Garuccio, Bari, 26-29 settembre 2017, 73-78, Pavia University Press, Pavia, 2019 <http://archivio.paviauniversitypress.it/oa/ 9788869521188>.
21. R. Shankland, Conversations with Albert Einstein, *American Journal of Physics*, 1963: 31: 47-57.
22. A. Silvestri, *Omaggio ad Albert Einstein*, Politecnico di Milano, Milan, 2005.

23. *Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles*, vol. 5, série II, J. Bosscha éditeur, Nijhoff, La Haye, 1900.
24. C. Bracco, Un apercu des liens d'Albert Einstein et de Michele Besso avec les universités et les écoles d'ingenieurs italiennes, *Annali di Storia delle università italiane*, 2015: 2: 129-152.
25. M. Reinganum, Molekuläre Anziehung in schwach comprimierten Gasen, *Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles*, 1900: 5: 574-582.
26. L. Boltzmann, *Vorlesungen über Gastheorie*, tome 1 (tome 2), Johann Ambrosius Barth, Leipzig 1896 (1898).
27. D. Berthelot, Quelques remarques sur l'équation caractéristique des fluides, *Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles*, 1900: 5: 417-446.
28. J. Renn, Einstein's controversy with Drude and the origin of statistical Mechanics: a new glimpse from the love letters, *Archive for the history of exact sciences*, 1997: 51: 315-354.
29. C. Cercignani, Ludwig Boltzmann, The Man Who Trusted Atoms, Oxford University press, New York, 1998.
30. C. Moore et al., The Ostwald-Gibbs correspondence: an interesting component in the history of the energy concept, *Bulletin for the History of Chemistry*, 2002: 27(2): 114-127.
31. M. Planck, *Vorlesungen über Thermodynamik*, Veit & C^{ie}, Leipzig, 1897.
32. O. Darrigol, *Atoms, mechanics, and probability: Ludwig Boltzmann's statistic-mechanical writings – an exegesis*, Oxford university press, Oxford, 2018.
33. J. W. Gibbs, *Elementary principles in statistical mechanics, developed with special reference to the rational foundations of thermodynamics*, Scribner, New York, 1902.
34. M. Planck, über die mechanische Bedeutung der Temperatur und der Entropie, in *Festschrift Ludwig Boltzmann gewidmet zum sechzigsten Geburtstage*, 113-122, J. A. Barth, Leipzig, 1904.
35. J. W. Gibbs, *Thermodynamische Studien*, Engelmann, Leipzig, 1892.
36. J. Mehra, Einstein and the foundation of statistical Mechanics, *Physica*, 1975: 79A: 447-477.
37. L. Navarro, Gibbs, Einstein and the foundations of statistical Mechanics, *Archive for the history of exact sciences*, 1998: 53: 147-180.
38. L. Peliti, R. Rechtman, Einstein's approach to statistical mechanics: the 1902-1904 papers, *Journal of statistical physics*, 2017: 167: 1020-1038.
39. J. Uffink, Insuperable difficulties: Einstein's statistical road to molecular physics, *Studies in the History and Philosophy of Modern Physics*, 2006: 37: 36-70.
40. A. Einstein, Bemerkungen zu den Hertzschen Arbeiten „über die mechanischen Grundlagen der Thermodynamik", *Annalen der Physik*, 1911: 34:175-176; in *Collected Papers of Albert Einstein, vol. 3, The Swiss Years: Writings 1909-1911*, M. J. Klein, A. J. Kox, J. Renn et R. Schulman éditeurs, 313-315, Princeton University Press, Princeton, 1993.
41. E. Mach, *La mécanique, exposé historique et critique de son développement*, J. Gabay, Paris, 1987 (édition originale 1883).
42. P. Drude, *Physiks des aethers auf elektromagnetischer Grundlage*, F. Encke, Stuttgart, 1894.

43. A. Fresnel, *Œuvres Complètes*, tome II, 627-636, Imprimerie impériale, Paris, 1868.
44. C. Bracco et J.-P. Provost, La relativité au premier ordre en *V/c*, remarques pédagogiques et historiques, *Bulletin de l'Union des physiciens*, 2014: 108: 533-546.
45. H. Poincaré, À propos de la théorie de M. Larmor, *L'Éclairage électrique*, 1895: 3: 289-295.
46. W. Wien, Ueber die Fragen, welche die translatorische Bewegung des Lichtäthers betreffen, *Annalen der Physik und Chemie*, 1898: 65: *Beilage* i-xvii.
47. H.-A. Lorentz, *Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpen*, Brill, Leyden, 1895; in *Collected Papers vol. 5*, Nijhof, La Haye, 1935-1939: 1-137.
48. H. Poincaré, La théorie de Lorentz et le principe de réaction, *Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles*, 1900: 5: 252-278.
49. G. Mie, *Beiblätter zu den Annalen der Physik*, 1901: 25/5: 371-374.
50. A. Einstein, Prinzip von der Erhaltung der Schwerpunktsbewegung und die Trägheit der Energie, *Annalen der Physik*, 1906: 20: 627-633; in *CPAE 2*, 360-366.
51. O. Darrigol, The mystery of the Einstein-Poincaré connection, *Isis*, 2004: 95: 614-626.
52. A. I. Miller, Why did Poincaré not create Special Relativity in 1905? *Actes du colloque Henri Poincaré: Science et philosophie,* Nancy, 18 May 1994, J. L. Greffe, G. Heinzmann et K. Lorenz éditeurs, Akademie Verlag & Blanchard, Berlin/Paris, 1996.
53. H. Poincaré, *Thermodynamique*, Carré, Paris, 1892 (2nde édition 1908).
54. A. I. Miller, On Einstein, light quanta, radiation, and relativity in 1905, *American Journal of physics*, 1976: 44: 912-923.
55. A. Einstein, How I created the theory of relativity, English translation Y. Ono from notes of J. Ishiwara, *Physics Today*, 1982: 35(8): 45-47.
56. H. Poincaré, *Électricité et Optique*, Carré et Naud, Paris, 1901 (2nde édition).
57. H. Poincaré, *La science et l'hypothèse*, Flammarion, Paris, 1902.
58. A. Einstein, *Lettres à Maurice Solovine*, Gauthier-Villars, Paris, 1956.
59. J.-P. Provost, C. Bracco, The 1895 Lorentz transformations: historical issues and present teaching, *European Journal of Physics*, 2016: 37 <doi:10.1088/0143-0807/37/4/045601>.
60. R. Gans, *Beiblätter zu den Annalen der Physik*, 1905: 29/4: 169-170.
61. A. Einstein, Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogen Folgerungen, *Jahrbuch der Radioactivität und Elektronik*, 1907: 4: 411-462; in *CPAE 2*, 433-484.
62. D. A. Goldhammer, Ueber den Druck der Lichtstrahlen, *Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles*, 1900: 5: 467-483.
63. B. Raffaelli, C. Bracco, J.-P. Provost, Un problème d'oscillateurs: la formule de Planck, *Bulletin de l'union des physiciens*, 2006: 885: 735-739.
64. M. Planck, Ueber die von einem elliptisch schwingenden Ion emittierte und absorbierte Energie, *Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles*, 1900: 5: 164-174.

65. C. Bracco et J.-P. Provost, Quanta de Planck, d'Einstein et d'«aujourd'hui», *Bulletin de l'Union des Physiciens*, 2005: 878-879: 909-928.
66. M. Planck, Ueber das Gesetz der Energieverteilung im Normalspektrum. *Annalen der Physik*, 1901: 4(4): 563-573.
67. A. Einstein, Zum gegenwärtigen Stand des Strahlungsproblems, *Physikalische Zeitschrift*, 1909: 10: 185-193; in *CPAE 2*, 542-550.

Scienze naturali
Geologia

Istituto Lombardo (Rend. Scienze) 152, 155-166 (2018)

ITALIAN GEOLOGY AND CLIMATE CHANGE IN THE DEEP PAST

Nota del m.s. HUGH C. JENKYNS (*)

(Adunanza del 25 ottobre 2018)

SUNTO. – Le rocce sedimentarie mesozoiche, depositatesi in mare sia profondo che poco profondo, sono presenti in tutta Italia e ben esposte nelle montagne e nelle valli fluviali. Studi dettagliati di queste successioni da parte di geologi italiani, a partire dal diciannovesimo secolo e continuando fino ad oggi, hanno prodotto una biostratigrafia ad alta risoluzione che consente di identificare incrementi di tempo geologico inferiori a un milione di anni. I primi lavori si basavano in gran parte sulle ammoniti per definire la biostratigrafia, ma erano applicabili principalmente ai sedimenti di età giurassica. Lo studio di calcari pelagici e di scisti di età cretacea furono successivamente, nel ventesimo secolo, studiati usando microfossili planctonici, con dimensioni di un granello di sabbia, e anche nannofossili ancora più piccoli di scala micrometrica. Il lavoro pionieristico sulla magnetostratigrafia e la ciclostratigrafia, svolto principalmente sui sedimenti cretacei che affiorano in Marche-Umbria, ha aggiunto ulteriore raffinamento alla misurazione di brevi intervalli di tempo rappresentati nelle rocce. Con questa base stratigrafica, segnali litologici e chimici distinti, scoperti per primi nelle sequenze italiane, sono stati riconosciuti in tutto il mondo e dimostrati di rilevanza globale. In particolare, il coinvolgimento degli isotopi del carbonio ha sottolineato l'utilità della chemostratigrafia, non solo come ulteriore aiuto alla correlazione, ma anche come testimonianza di importanti cambiamenti ambientali. Più significativi in questo contesto sono gli eventi anossici oceanici cretacei, la cui documentazione sedimentaria è stata documentata per la prima volta in Italia. Questi eventi sono stati caratterizzati dallo sviluppo di scisti neri ricchi di sostanza organica depositati in acque in gran parte prive di ossigeno durante periodi di temperature straordinariamente elevate note come 'ipertermali'. Gli ipertermali, probabilmente guidati da emissioni di anidride carbonica da eruzioni vulcaniche su larga scala, illustrano l'impatto ambientale su un pianeta colpito da un riscaldamento globale estremo.

(*) Department of Earth Sciences, University of Oxford, South Parks Road, Oxford, UK. E-mail: hugh.jenkyns@earth.ox.ac.uk

***

ABSTRACT. – Mesozoic sedimentary rocks, of both deep- and shallow-water character, are present throughout Italy and well exposed in mountains and river valleys. Detailed studies of these sections by Italian geologists, beginning in the nineteenth century and continuing to this day, have produced a high-resolution biostratigraphy that allows identification of increments of geological time of less than a million years. Early work relied largely on ammonites to define biostratigraphy but was applicable primarily to sediments of Jurassic age. Study of deep-marine pelagic limestones and shales of Cretaceous age were subsequently, in the twentieth century, investigated using planktonic microfossils, the size of a sand grain, and even smaller nannofossils of micron scale. Pioneering work on magnetostratigraphy and cyclostratigraphy, undertaken primarily on Cretaceous sediments cropping out in Marche-Umbria, added further refinement to the measuring of small intervals of time in rock. With this stratigraphic background, distinct lithological and chemical signals, discovered first in Italian sequences, could be recognized world-wide and proven to be of global significance. In particular, the involvement of carbon isotopes has underscored the utility of chemostratigraphy, not only as a further aid to correlation, but also as a testimonial to major environmental change. Most significant in this context are the Cretaceous oceanic anoxic events, whose sedimentary record was first documented from Italy. These events were characterized by the development of organic-rich black shales deposited in waters largely lacking in oxygen during times of extraordinarily high temperatures known as hyperthermals. Hyperthermals, likely driven by supply of carbon dioxide from large-scale volcanic eruptions, illustrate the environmental impact on a planet affected by extreme global warming.

1. INTRODUCTION

As a natural laboratory for the earth sciences, the sedimentary rocks of Mesozoic age (Triassic, Jurassic and Cretaceous Periods) exposed in the Italian peninsula and Sicily are unrivalled. Our understanding of the chemistry and biology of ancient oceans and seas that existed in and around the Mediterranean area over the period ~252 to ~66 million years ago has been facilitated by the presence of exquisite exposures of limestones and shales in mountains and river valleys stretching from the Alps south to the Apennines and beyond. This interval is commonly considered as representing a time when the Earth was a so-called 'greenhouse world' when the planet was largely or completely without ice at the poles.

1.1 Ammonites and biostratigraphy

Early studies on these Mesozoic sedimentary rocks, undertaken in the nineteenth century by Italian geologists, were primarily palaeonto-

logical in nature and were essential in laying the groundwork for our understanding of the stratigraphy of the different successions. Ammonites were a particular attraction to these early workers, many of whom built up substantial collections of these fossils that would be impossible to duplicate today [1]. Most ammonites came from pelagic sedimentary rocks of Jurassic age, being particularly common in the so-called *rosso ammonitico*, a much-quarried brick-red decorative marble used in palaces, churches and other buildings throughout the world. However, ammonites are relatively rare in both the older Triassic and the younger Cretaceous deposits in Italy and elsewhere in the Alpine-mediterranean region.

1.2 Microfossils, nannofossils and biostratigraphy

The study of planktonic microfossils such as foraminifera, typically the size of a sand grain, accelerated in the twentieth century, to be followed by identification and classification of even smaller micron-sized nannofossils known as coccoliths. These fossils facilitated the dating and stratigraphical resolution of these younger Mesozoic (*i.e.* Cretaceous) pelagic sediments to a level comparable to that achieved by ammonites [*e.g.* 2, 3, 4, 5]. Much of this work, spear-headed in Italy, used optical microscopy to study thin-sections and smear-slides taken from consolidated material. Some limestone outcrops, particularly those exposing the *Scaglia*, so called because of its tendency to break into flakes when hit with a hammer, also contained a record of reversals in the Earth's magnetic field that were an additional aid to stratigraphy and correlation [6, 7, 8]. By the nineteen-seventies, the stage was set for telling accurate time in sedimentary rocks and identifying increments of millions of years or less, in many cases with the primary localities situated in the Alps and Apennines. Furthermore, the same increments of geological time recorded in rock could, for example, be identified in sediments deposited half a world away in the middle of the Pacific Ocean by virtue of the presence of these characteristic microscopic fossils. Because the Jurassic and Cretaceous deep-sea pelagic sediments in the Pacific and other oceans could only be sampled by drilling, with the subsequent recovery of very limited core material, the chances of encountering stratigraphically useful ammonites was slim, whereas microscopic fossils usually proved abundant enough in many places to give an accurate age determination. Such studies opened the door for

examination of chemical and biological signals recorded at the same time in different parts of the world ocean. Investigation of such phenomena that seemingly have affected marine waters across the globe has given rise to the discipline of palaeoceanography.

1.3 Cyclostratigraphy and orbital chronology

The Cretaceous pelagic sediments of particularly the Umbria-Marche region have been crucial to studies on cyclicity, typically manifested by regular stratigraphic alternations in colour (grey, green, black or red), hardness and degree of weathering, all of which may relate to variations in the ratio of clays to calcium carbonate as well as the content of iron minerals and organic matter [9, 10, 11, 12]. At the outcrop level, different beds are commonly bundled or packaged into larger units, manifesting an obvious hierarchy in the stratigraphic pattern. These cycles are now routinely interpreted as related to the parameters of the Earth's orbit that govern the latitudinal distribution and intensity of solar radiation received at the planetary surface and hence control climate. Major effects on the continents would have involved changes in temperature and rainfall affecting the volume and content of fluvial input to marine environments, whereas the oceans themselves would have responded to changes to wind-driven lateral and vertical movements of watermasses, in some cases bringing nutrient-laden seawater close to the surface where it could be utilized by photosynthetic plankton.

The frequency of precession (very approximately 20 kyr), obliquity (very approximately 40 kyr) and eccentricity (very approximately 100 and ~400 kyr as major parameters) may all be recognized in favourable sections, with varying degrees of confidence, potentially producing a rock-based chronometer that can be integrated with biostratigraphy and magnetostratigraphy to identify ever-smaller increments of geological time.

1.4 Deep- and shallow-water sediments

The Jurassic and Cretaceous sediments, typically rich in calcium carbonate, which contain the micro- and macrofossils of stratigraphic worth in Italy, are pelagic in character and conventionally interpreted as deposited on an ancient sunken continental margin at the edge of an ocean in water depths estimated as hundreds to a few thousand metres

[13, 14, 15]. However, in many places stratigraphically underlying these pelagic sediments are limestones of a different character: they are typically light-coloured, devoid of ammonites and planktonic microfossils, particularly hard-weathering, and thereby form some of the spectacular mountain scenery found in the Dolomites, Southern Alps, Apennines and Sicily. Although these white to pale grey limestones contain some fossils, which are always difficult to extract, these faunas do not supply the stratigraphic refinement offered by the organisms found in the overlying pelagic sediments, but we know that some sections date to the Triassic and Jurassic. The application of magnetostratigraphy and cyclostratigraphy has proven problematic with these sedimentary rocks because they appear to have been deposited discontinuously and hence contain unrecorded time, thereby possessing an incomplete record. The different types of grains and sedimentary structures found in these calcareous deposits do, however, point to formation in very shallow warm water, at depths of a few tens of metres or less. A modern analogue for such environments would be found in the tropical Bahama Banks, on the eastern continental margin of North America [13, 14].

1.5 Stable isotopes and chemostratigraphy

An additional aid to dating and correlation, which has become progressively more important since 1980, and applicable to both deep- and shallow-water Mesozoic limestones, lies in the field of geochemistry, namely the development of chemostratigraphy. Most important in this context have been the stable isotopes of carbon, oxygen, sulphur and strontium and their application has now become commonplace. In terms of investigations of environmental change in the deep past, carbon-isotope signatures (to be exact, the ratio between carbon-13 and carbon-12 plotted against sections of sedimentary rock) have proved to be particularly useful on two accounts [16, 17, 18]. Firstly, their rapid change in values through time has produced distinctive patterns that plotted against sedimentary sections have enabled correlation of sedimentary sequences around the globe, both in pelagic and shallow-water sediment; and secondly, the apparently rapid movement to higher or lower values points to major disturbances to the global carbon cycle with impacts on phenomena such as temperature, dissolved oxygen levels in marine waters and ocean acidification [19, 20].

1.6 Hyperthermals and Oceanic Anoxic Events

As the reality of global warming has become widely accepted, it has become important and potentially illuminating to look back in geological time to investigate the causes and consequences of past extreme temperatures in the oceans and atmosphere. Here again, the sedimentary sequences exposed in Italy, of both deep- (pelagic) and shallow-water character, offer an exemplary archive with evidence of so-called 'hyperthermals' recorded in a number of exposures. Although the reconstruction of ancient seawater temperatures relies on sophisticated analytical work, typically involving determination of oxygen isotopes (the ratio between oxygen-18 and oxygen-16) in limestones and fossils made of the mineral calcite, and characterization of complex organic molecules in bulk sediment, many outcrops in Italy and elsewhere in the world show changes in lithology that date to these times of extreme global warmth.

The most dramatic manifestation of this phenomenon, in terms of abrupt lithological change, is the 1-metre-thick organic-rich black shale intercalated between the white pelagic limestone of the *Scaglia* that was first described by Guido Bonarelli [21] in a river valley cutting through the mountains outside Gubbio in Marche-Umbria [15]. Deposited some 94 million years ago in the Late Cretaceous, the so-called *Livello Bonarelli* coincided in time with extremely high global sea-surface temperatures that seemingly well exceeded 35°C in low latitudes [22]. The peculiar characteristics of this unit, being unusually enriched in organic matter (that imparts the black colour), as well as the remains of siliceous zooplankton known as radiolaria and tiny crystals of pyrite, suggest deposition in an oxygen-depleted environment under conditions of high plankton productivity in near-surface waters. A very similar deposit, of comparable thickness, named the *Livello Selli*, has also been described from Marche-Umbria and this unit dates to ~ 120 million years ago, similarly corresponding in time with a hyperthermal [22, 23, 24]. Such sediments have been attributed to globally significant phenomena known as Oceanic Anoxic Events that are associated with high rates of speciation and extinction of planktonic organisms [19, 25, 26, 27, 28, 29].

One of the principal factors favouring accumulation of organic matter on the sea floor was decreased oxygen solubility due to elevated marine temperatures. The additional factor was high plankton produc-

tivity, the source of much organic matter that transits to the sea floor, the origin of which can be directly attributed to elevated nutrient availability. Supply of these nutrients can be related to increased weathering on the continents with transport by expanded rivers to the ocean together with accelerated reaction between sea-floor basalts and seawater: all processes that became progressively more important under conditions of extreme global warming [30, 31, 32, 33].

1.7 Role of Large Igneous Provinces

The reaction between sea-floor basalts and seawater may have been particularly important because of the well-established coincidence in timing of submarine extrusion of huge volumes of this type of volcanic rock (to form so-called Large Igneous Provinces) in the oceans and the development of hyperthermals, commonly associated with regional oxygen depletion in the oceans. Chemical fingerprints in Cretaceous black shales, such as the *Livello Bonarelli*, *Livello Selli* and their correlatives elsewhere in the world, indicate contemporaneous magmatic activity [34, 35, 36, 37]. Such relationships have offered the possibility that hyperthermals and/or oceanic anoxic events owe their ultimate cause to a volcanogenic supply of carbon dioxide [*e.g.*, 30, 31, 32]. Here again, the *Livello Bonarelli* has something to teach us in that, despite being underlain and overlain by pelagic limestones, the black shale itself is totally devoid of calcium carbonate, a characteristic that could well have been caused by ocean acidification related to heightened atmospheric levels of this greenhouse gas [20, 38].

1.8 Feedbacks in the ocean-atmosphere system

Recently, various feedbacks in the ocean-atmosphere system have been recognized in that increased weathering of silicate rocks on land and under the sea, for which there is geochemical evidence, and deposition of organic matter in black shales, are both processes that will draw down carbon dioxide and promote global cooling through an inverse greenhouse effect [39]. Indeed, such transient cooling phases have now been recognized as punctuating hyperthermals/oceanic anoxic events from the Cretaceous sedimentary record in Italy and elsewhere [40, 41]. The overall atmospheric response during these episodes of intense environmental change must therefore have been the

result of a competition between rates of supply of volcanogenic carbon dioxide and its loss to chemical and biological processes operating in the oceans and on the continents. An interesting effect of a global increase in organic-matter burial, all other factors being equal, would have been a rise in the oxygen content of the atmosphere, which would have caused shallow levels of the ocean, well above the deeper anoxic layers, to remain well ventilated. Investigation of phenomena such as these belongs in the realm of 'Earth System Science'.

2. Conclusions

Our present-day understanding of the physical, chemical and biological processes that affected the oceans and atmosphere during the Mesozoic Era, when the planet was largely if not wholly without polar ice, has been built on the development of sound stratigraphy. The combination of availability of excellent outcrops of limestones and shales in mountains and streams, extending from the Alps to Sicily, coupled with the strong tradition for all branches of palaeontology in Italian universities, has underpinned the new disciplines of palaeoceanography and Earth-System Science, particularly as applied to the greenhouse world of the deep past.

3. Acknowledgements

I am very grateful to Elisabetta Erba for her help with the Italian abstract.

REFERENCES

1. Arkell WJ, *Jurassic Geology of the World*. Oliver and Boyd, Edinburgh, 806 pp, 1956.
2. Renz, O, Stratigraphische und mikropalaeontologische Untersuchung der Scaglia (Obere Kreide-Tertiär) im zentralen Apennin, *Eclogae Geologicae Helvetiae*, 1936: 29: 1-149.
3. Premoli Silva I, Sliter WV, Cretaceous planktonic foraminiferal biostratigraphy and evolutionary trends from the Bottaccione section, Gubbio, Italy, *Palaeontographia italica*, 1994: 82: 1-89.
4. Erba E, Calcareous nannofossils and Mesozoic oceanic anoxic events, *Marine micropaleontology*, 2004: 52: 85-106.
5. Erba E, Bottini C, Faucher G, Gambacorta G, Visentin S, The response of calcareous nannoplankton to Oceanic Anoxic Events: The Italian pelagic record, *Bollettino della Società Paleontologica Italiana*, 2019: 58: 51-71.
6. Lowrie W, Alvarez W, Upper Cretaceous-Paleocene magnetic stratigraphy at Gubbio, Italy III. Upper Cretaceous magnetic stratigraphy, *Geological Society of America Bulletin*, 1977: 88: 374-377.
7. Alvarez W, Arthur MA, Fischer AG, Lowrie W, Napoleone G, Premoli Silva I, Roggenthen WM, Upper Cretaceous-Paleocene magnetic stratigraphy at Gubbio, Italy V. Type section for the Late Cretaceous-Paleocene geomagnetic reversal time scale, *Geological Society of America Bulletin*, 1977: 88: 383-389.
8. Coccioni R, Premoli Silva I, Revised Upper Albian-Maastrichtian planktonic foraminiferal biostratigraphy and magneto-stratigraphy of the classical Tethyan Gubbio section (Italy), *Newsletters on Stratigraphy*, 2015: 48: 47-90.
9. De Boer PL, Cyclicity and storage of organic matter in Middle Cretaceous pelagic sediment, in *Cyclic and Event Stratification*, Einsele G, Seilacher, A, editors, 456-474, Springer Verlag, New York, 1982.
10. Herbert TD, Fischer AG, Milankovitch climatic origin of mid-Cretaceous black shale rhythms in central Italy: *Nature*, 1986: 321: 739-743.
11. Fischer AG, D'Argenio B, Premoli Silva I, Weissert H, Ferreri V, Cyclostratigraphic approach to Earth's history: an introduction, in *Cyclostratigraphy: Approaches and Case Histories*, D'Argenio B, Fischer AG, Premoli Silva I, Weissert H, editors, Special Publication of the Society of economic Paleontologists and Mineralogists: 81: 5-13, 2004.
12. Fischer AG, Hilgen, FJ, Garrison RE, Mediterranean contributions to cyclostratigraphy and astrochronology , *Sedimentology*, 2009: 56: 63-94.
13. Bernoulli D, North Atlantic and Mediterranean Mesozoic facies: a comparison, in, *Initial Reports of the Deep Sea Drilling Project* ,11, Hollister CD, Ewing JI et al., 801-871, US Government Printing Office, Washington, DC, 1972.
14. Bernoulli D, Jenkyns HC, Alpine, Mediterranean and Central Atlantic Mesozoic facies in relation to the early evolution of the Tethys, in *Modern and Ancient Geosynclinal Sedimentation, a Symposium*, Dott RH, Shaver RH, editors, Special Publication of the Society of Economic Paleontologists and Mineralogists: 19: 129-160, 1974.
15. Bernoulli D, Jenkyns HC, Ancient oceans and continental margins of the Alpine-

mediterranean Tethys: deciphering clues from Mesozoic pelagic sediments and ophiolites, *Sedimentology*, 2009: 56: 147-190.
16. Scholle PA, Arthur MA, Carbon isotope fluctuations in Cretaceous pelagic limestones: potential stratigraphic and petroleum exploration tool, *American Association of Petroleum Geologists Bulletin*, 1980: 64: 67-87.
17. Jenkyns HC, Clayton CJ, Black shales and carbon isotopes in pelagic sediments from the Tethyan Lower Jurassic, *Sedimentology*, 1986: 33: 87-106.
18. Gambacorta G, Jenkyns HC, Russo F, Tsikos H, Wilson PA, Faucher G, Erba E, Carbon-and oxygen-isotope records of mid-Cretaceous Tethyan pelagic sequences from the Umbria-Marche and Belluno Basins (Italy), *Newsletters on Stratigraphy*, 2015: 48: 299-323.
19. Jenkyns HC, Geochemistry of oceanic anoxic events, *Geochemistry Geophysics Geosystems*, 2010: 11: Q03004, doi: 10.1029/2009GC002788.
20. Jenkyns HC, Oceanic Anoxic Events: the record from Italy and beyond, *Rendiconti Online della Società Geologica Italiana,* 2012*:* 21: 8-10.
21. Bonarelli G, *Il territorio di Gubbio. Notizie geologiche*. Tipografia economica, Roma, 38 pp, 1891.
22. O'Brien CL, Robinson SA, Pancost RD, Sinninghe Damsté JS, Schouten S, Lunt DJ, Alsenz H, Bornemann A, Bottini C, Brassell SC, Farnsworth A, Forster A, Huber BT, Inglis GN, Jenkyns HC, Linnert C, Littler K, Markwick P, McAnena A, Mutterlose J, Naafs BDA, Püttmann W, Sluijs A, van Helmond AGM, Vellecoop J, Wagner T, Wrobel N E, Cretaceous sea-surface temperature evolution: Constraints from TEX_{86} and planktonic foraminiferal oxygen isotopes, *Earth-Science Reviews*, 2017: 172: 224-247.
23. Coccioni A, Nesci O, Tramontana M, Wezel FC, Moretti E, Descrizione di un livello-guida "radiolaritico-bituminoso ittiolitico" alla base delle Marne a fucoidi nell'Appennino umbro-marchigiano, *Bollettino della Società Geologica Italiana*, 1987: 106: 183-192.
24. Malinverno, A, Hildebrandt J, Tominaga M, Channell, JET, M-sequence geomagnetic polarity time scale (MHTC12) that steadies global spreading rates and incorporates astrochronology constraints, *Journal of Geophysical Research*, 2012: 117: B06104, doi:10.1029/2012JB009260.
25. Schlanger SO, Jenkyns HC, Cretaceous oceanic anoxic events: causes and consequences, *Geologie en Mijnbouw*, 1976: 55: 179-194.
26. Jenkyns HC, Cretaceous anoxic events: from continents to oceans. *Journal of the Geological Society of London*, 1980: 137: 171-188.
27. Premoli Silva I, Erba E, Salvini G, Locatelli C, Verga D, Biotic changes in Cretaceous oceanic anoxic events of the Tethys. *Journal of Foraminiferal Research*, 1999: 29: 352-370.
28. Leckie RM, Bralower TJ, Cashman R, Oceanic anoxic events and plankton evolution: Biotic response to tectonic forcing during the mid Cretaceous. *Paleoceanography*, 2002: 17/3: doi: 10.1029/2001PA000623.
29. Tsikos H, Jenkyns HC, Walsworth-Bell B, Petrizzo MR, Forster A, Kolonic S, Erba E, Premoli Silva I, Baas M, Wagner T, Sinninghe Damsté JS, Carbon-isotope stratigraphy recorded by the Cenomanian-Turonian Oceanic Anoxic Event: correlation

and implications based on three key localities. *Journal of the Geological Society of London*, 2004: 161: 711-719.
30. Jenkyns HC, Mesozoic anoxic events and palaeoclimate, *Zentralblatt für Geologie und Paläontologie*, 1999: 1997: 943-949.
31. Jenkyns HC, Evidence for rapid climate change in the Mesozoic-Paleogene greenhouse world. *Philosophical Transactions of the Royal Society, Series A*, 2003: 361: 1885-1916.
32. Erba E, Duncan RA, Bottini C, Tiraboschi D, Weissert H, Jenkyns HC, Malinverno A, Environmental consequences of Ontong Java Plateau and Kerquelen Plateau volcanism, in: *The Origin, Evolution, and environmental Consequences of oceanic Large Igneous Provinces*, Neal CR, Sager, WW, Sano T, Erba E, editors, Geological Society of America Special Paper: 511: 271-303, 2015.
33. Jenkyns HC, Dickson AJ, Ruhl M, van den Boorn SHJM, Basalt-seawater interaction, the Plenus Cold Event, enhanced weathering and geochemical change: deconstructing Oceanic Anoxic Event 2 (Cenomanian-Turonian, Late Cretaceous), *Sedimentology*, 2017: 64: 16-43.
34. Turgeon SC, Creaser RA, Cretaceous oceanic anoxic event 2 triggered by a massive magmatic episode, *Nature*, 2008: 454: 323-326.
35. Du Vivier AD, Selby D, Sageman BB, Jarvis I, Gröcke DR, Voigt S, Marine $^{187}Os/^{188}Os$ isotope stratigraphy reveals the interaction of volcanism and ocean circulation during Oceanic Anoxic Event 2. *Earth and Planetary Science Letters*, 2014: 389: 23-33.
36. Charbonnier G, Föllmi KB, Mercury enrichments in lower Aptian sediments support the link between Ontong Java large igneous province activity and oceanic anoxic episode 1a. *Geology*, 2017: 45: 63-66.
37. Scaife JD, Ruhl M, Dickson AJ, Mather TA, Jenkyns HC, Percival LME, Hesselbo SP, Cartwright J, Eldrett JS, Bergman SC, Minisini D, Sedimentary mercury enrichments as a marker for submarine large igneous province volcanism? Evidence from the Mid Cenomanian event and Oceanic Anoxic Event 2 (Late Cretaceous). *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*, 2017: 18: 4253-4275.
38. Hönisch B, Ridgwell A, Schmidt DN, Thomas E, Gibbs SJ, Sluijs A, Zeebe R, Kump L, Martindale RC, Greene SE, Kiessling W, Ries J, Zachos JC, Royer DL, Barker S, Marchitto TM Jr, Moyer R, Pelejero C, Ziveri P, Foster GL, Williams B, The geological record of ocean acidification. *Science,* 2012: 335: 1058-1063.
39. Pogge von Strandmann PA, Jenkyns HC, Woodfine RG, Lithium isotope evidence for enhanced weathering during Oceanic Anoxic Event 2. *Nature Geoscience*, 2013: *6*: 668-672.
40. Jenkyns HC, Transient cooling episodes during Cretaceous Oceanic Anoxic Events with special reference to OAE 1a (Early Aptian). Phil. Trans. R. Soc., Series A, 2018: 376: 20170073, doi: 10.1098/rsta.2017.0073.
41. O'Connor LK, Jenkyns HC, Robinson SA, Remmelzwaal SR, Batenburg SJ, Parkinson IJ, Gale AS, A re evaluation of the Plenus Cold Event, and the links between CO_2, temperature, and seawater chemistry during OAE 2. *Paleoceanography and Paleoclimatology*, 2020: 35: e2019PA003631, doi: 10.1029/2019PA003631.

Scienze naturali
Ecologia
Istituto Lombardo (Rend. Scienze) 152, 167-170 (2018)

L'IMPATTO DEI CAMBIAMENTI CLIMATICI SULLA CRESCITA ECONOMICA E LA DISUGUAGLIANZA GLOBALE[1]

MASSIMO TAVONI (*)

Nota presentata dal m.e. Marino Gatto
(Adunanza del 29 novembre 2018)

SUNTO. – I cambiamenti climatici avranno un impatto sulla crescita economica e aggraveranno le disuguaglianze globali. Colpendo di più i più poveri, sia in Italia, Europa e in tutto il mondo, il riscaldamento globale rappresenta una sfida per l'ordine internazionale. Qui discutiamo brevemente le ultime analisi degli impatti economici dei cambiamenti climatici.

***

ABSTRACT. – Climate change will impact economic growth and exacerbate global income inequalities. By hitting the poorest more, both in Italy, Europe and worldwide, it poses a challenge for the international order. Here we discuss the latest analysis of the economic impacts of climate change.

L'impatto dei cambiamenti climatici sulla nostra società sarà molto profondo. Già ad oggi, con un riscaldamento del pianeta di circa 1 grado centigrado, gli impatti sulla disuguaglianza globale si fanno sentire. Ma questo è niente rispetto a quello che avverrà nei prossimi

(*) Professore di Economia dei cambiamenti climatici, Politecnico di Milano; Direttore del RFF CMCC European Institute on Economics and the Environment, Italy. E-mail: massimo.tavoni@polimi.it

1 Sintesi dell'intervento.

decenni. Il riscaldamento globale supererà i 2 gradi a metà secolo e a seconda delle nostre azioni potrà andare ben oltre. Questo avrà ripercussioni sia sugli ecosistemi - come l'estinzione di ecosistemi e speciesia sull'uomo - su fattori di produzione come lavoro, capitale e risorse naturali. Gli economisti del clima hanno affrontato questo problema ormai da diversi anni, ma ad oggi le stime degli impatti economici rimangono un argomento di ricerca molto fertile e ancora lungi dall'essere consolidate.

Recentemente sono stati sviluppati metodi alternativi per stimare l'impatto economico del clima a partire da dati empirici storici. Questo approccio analizza il modo in cui i cambiamenti di temperatura negli ultimi 40 anni hanno influenzato la crescita economica di tutti i paesi del mondo, tenendo conto delle loro differenze istituzionali, tecnologiche e climatiche. Questa valutazione retrospettiva ha rivelato una relazione non lineare tra temperatura e crescita economica: per i paesi freddi (al di sotto di una temperatura "ideale"), un aumento delle temperature potrebbe favorire l'economia e portare a una crescita aggiuntiva. Per i paesi caldi, tuttavia, porterebbe a una crescita economica ridotta, più significativo è il paese più caldo.

Applicando queste stime a diversi scenari di riscaldamento futuri, si ottengono perdite economiche estremamente significative. Ad esempio, per gli aumenti della temperatura globale di 3°C, un risultato molto probabile dati gli attuali andamenti delle emissioni, sono state stimate perdite del PIL mondiale tra il 15 e il 60%. È importante tenere presente che questi studi, poiché estrapolano le informazioni del passato in un futuro con un clima diverso, non includono fattori come l'innalzamento del mare, l'acidificazione degli oceani, ecc., Fattori che potrebbero aumentare principalmente i danni economici al clima. Al contrario, una maggiore adattabilità potrebbe limitare i danni. L'ultimo rapporto IPCC su 1,5°C ha mostrato che limitare il riscaldamento a 1,5°C invece di 2°C consentirebbe di risparmiare l'1,5-2,0% del prodotto lordo mondiale (PIL) di mezzo secolo e il 3,5% del PIL entro la fine del secolo. Sulla base di un tasso di sconto del 3%, ciò corrisponde a $ 8,1-11,6 trilioni e $ 38,5 trilioni di danni evitati rispettivamente alla metà e alla fine del secolo.

Queste analisi empiriche mostrano come le perdite economiche dovute al cambiamento climatico saranno concentrate principalmente nei paesi caldi, dove il riscaldamento aggiuntivo porta a un forte declino economico. I paesi caldi sono anche più poveri di quelli freddi. Di

conseguenza, il cambiamento climatico non solo rallenterà la crescita economica globale, ma aggraverà anche le disuguaglianze globali e colpirà più duramente quei paesi che, di fatto, hanno contribuito meno ai cambiamenti climatici causati dall'uomo.

Questo impatto diseguale e regressivo del cambiamento climatico è previsto avvenire anche in Italia, come si nota dalla *Fig. 1*. Usando metodi statistici simili a quelli descritti sopra, abbiamo stimato che nella seconda metà del secolo la perdita di PIL italiano dovuto al riscaldamento globale potrebbe essere superiore al 8%. In aggiunta, I nostri calcoli suggeriscono un aumento della disuguaglianza regionale in Italia del 60% nella seconda metà del secolo.

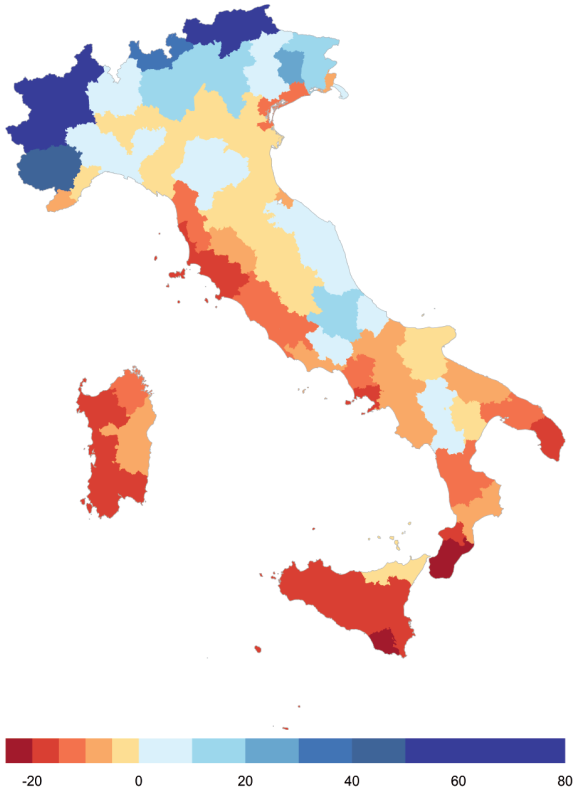


Fig. 1. Impatto del cambiamento climatico sulla crescita economica regionale in Italia. Fonte: 'Impatti economici dei cambiamenti climatici in Italia ' Rapporto per la Fondazione Sviluppo Sostenibile a cura di Massimo Tavoni, Francesco Bosello e Shouro Dasgupta.

L'aumentata iniquità causata dal cambiamento climatico si aggiunge ai trend di concentrazione della ricchezza che sono una delle caratteristiche fondamentali dello sviluppo economico degli ultimi decenni. Per l'Italia, il divario economico storico fra Nord e Sud del paese rischierebbe di allargarsi ulteriormente. E lo stesso ragionamento vale per il Nord e il Sud dell'Europa, e più in generale del mondo. Risolvere il problema del clima, dunque, significherebbe non solo evitare disastri ecosistemici ed economici, ma anche evitare che le disuguaglianze sociali - con tutte le loro ripercussioni politiche - aumentino sproporzionatamente.

Istituto Lombardo (Rend. Scienze) 152, 171-182 (2018)

LOCOMOZIONE UMANA E ANIMALE A DIFFERENTI GRAVITÀ: ADATTAMENTI BIOMECCANICI ED EFFETTI METABOLICI

ALBERTO ENRICO MINETTI (*)

Nota presentata dal m.e. Edgardo D'Angelo
(Adunanza del 29 novembre 2018)

SUNTO. – La prospettiva delle Missioni Apollo sulla Luna aveva allertato i fisiologi della locomozione alcuni anni prima delle imprese spaziali, stimolandoli a compiere studi e proporre teorie sull'adattamento del nostro organismo, nei suoi aspetti muscolo-scheletrici, a muoversi in condizioni di mutata accelerazione di gravità. Gli studi di Margaria e Cavagna, dedicati a salti e andature, avevano anticipato con successo che sulla superficie lunare gli astronauti avrebbero camminato con difficoltà, mentre la corsa sarebbe stata sostituita da un incedere a balzi. Da allora, nonostante la mancanza di altre simili missioni, molti altri ricercatori di tutto il mondo hanno studiato questo argomento, sia in termini sperimentali (ipo/iper gravità simulata) che teorici. L'approccio modellistico, basato sulla similarità dinamica (Numero di Froude), ha contribuito a spiegare le scelte spontanee delle andature adottate dagli astronauti sulla Luna. I risultati sperimentali combinati di meccanica ed energetica delle diverse forme di locomozione hanno indicato come il costo metabolico delle varie andature possibili (cammino, corsa, skipping, hopping), molto differente sulla Terra per ognuna di loro (rispetto al cammino, da 2x a 10x), tende a diventare progressivamente molto simile a bassi livelli di gravità. Ciò suggerisce che il costo per sostenere il peso corporeo costituisce una porzione determinante del dispendio energetico e, insieme all'analisi di altre variabili biomeccaniche, sembra promettere di chiarire alcuni aspetti ancora oggi irrisolti della locomozione terrestre (ad esempio l'indipendenza dalla velocità del costo metabolico della corsa).

(*) Professore Distaccato presso il Centro di Ricerca "Beniamino Segre", Accademia dei Lincei, Professore di Fisiologia, Laboratorio di Fisiomeccanica della Locomozione, Università degli Studi di Milano, Italy. E-mail: alberto.minetti@unimi.it

***

ABSTRACT. – A few years before Apollo Missions to Moon, locomotion physiologists promoted research and discussion about the potential adaptation of human body, the musculo-skeletal apparatus in particular, to an environment subject to a much smaller gravity acceleration than on Earth. Rodolfo Margaria and Giovanni Cavagna, who had just started investigating the fundamental mechanical paradigms of terrestrial locomotion, built a gravity-emulation facility in a 15 m tall vent shaft in Milano to study how jumping ability was affected by low-gravity. The combined knowledge led them to correctly predict that humans on the Moon would have walked at a very low pace and the alternative to an impaired running would have been a bouncing gait like hopping. Since then, other scientists around the world kept on researching on this subject, both experimentally and through mathematical models. Models based on 'dynamic similarity' (Froude Number) have confirmed that spontaneous locomotion adopted by astronauts was predictable. Recent biomechanical and metabolic experiments in the rebuilt emulation facility in Milano indicated that gaits with very different economy on Earth (running, skipping and hopping range from 2x to 10x, when compared to walking) progressively tend to have the same cost of transport when gravity decreases, and they are all alike at Moon gravity. This suggests that the energy devoted to sustain body weight represents a crucial determinant in the propulsion economy. Together with further biomechanical analysis, these data from emulated outer space are promising clues toward a better understanding of still unsolved mysteries of terrestrial locomotion (as the speed independence of metabolic cost of running).

1. INTRODUZIONE

L'esplorazione spaziale e una delle sue conseguenze a lungo termine, la colonizzazione di altri corpi celesti, costituiscono non solo l'estremizzazione della naturale curiosità umana ma una grande opportunità di espansione della ricerca scientifica e tecnologica, come dimostrato ad esempio dagli importanti esperimenti e risultati ottenuti in microgravità nei laboratori della International Space Station. La colonizzazione spaziale, aldilà dal sembrare un argomento puramente fantascientifico, potrebbe inoltre essere un giorno l'ultima risorsa per salvare l'umanità dall'estinzione per cause interne (per esempio, epidemie incurabili) o esterne (grandi meteoriti). Quindi possiamo attenderci uno sviluppo crescente di queste esplorazioni dove, oltre a rover e robot antropomorfi, vedremo cimentarsi con gli spostamenti su suoli non terrestri esseri umani (e presumibilmente anche animali, inizialmente quelli domestici) il cui sistema muscolo-scheletrico si è evoluto in 3-4 milioni di anni per funzionare a gravità terrestre.

Oltre ad altri importanti adattamenti fisiologici che dovranno essere assistiti in parte dalle condizioni ambientali locali e dai progressi tecnologici fino ad allora sviluppati, le diverse condizioni gravitazionali rappresenteranno una sfida adattativa che può essere studiata sulla Terra in anticipo. Del resto, nonostante che il procedere dell'esplorazione spaziale ci abbia mostrato tempi lunghi, l'evoluzione naturale verso lo sviluppo di soluzioni adattative stabili dell'apparato locomotorio sarebbe, dal momento dell'esposizione a una gravità diversa, così lenta da rendersi inutile.

La presente disanima intende ripercorrere brevemente quanto oggi conosciuto sulla biomeccanica e bioenergetica delle usuali andature bipedali (con qualche accenno a quelle quadrupedali) sulla Terra, riportando anche i risultati di ricerche effettuate in emulazioni locomotorie a gravità differenti da quella della nostra evoluzione.

2. Paradigmi locomotori

Il cammino, l'andatura che adottiamo per le basse velocità e che si basa sull'alternanza dei passi senza discontinuità tra gli appoggi sul terreno, prevede una traiettoria del baricentro corporeo che è assimilabile ad un pendolo capovolto. Analisi delle energie meccaniche coinvolte indicano che durante il ciclo locomotorio energia potenziale (dovuta all'altezza) e cinetica (proporzionale al quadrato della velocità) del baricentro variano (parzialmente) in modo reciproco, proprio come in un pendolo. Ciò implica che l'energia meccanica totale (la somma delle due precedenti) ha un'escursione inferiore alla somma delle escursioni delle sue due componenti, quindi parte del lavoro meccanico necessario per camminare viene risparmiata dal 'paradigma pendolare' [1].

La corsa, andatura che adottiamo per muoverci più velocemente quando il cammino non è più praticabile, e che sia basa sull'alternanza dei passi con una fase di volo tra i due, vede il baricentro corporeo muoversi approssimativamente lungo una sorta di sinusoide, la cui parte inferiore avviene durante il contatto con il terreno, e quella superiore costituisce la fase di volo. La fisica ci dice che quest'ultima fase è una traiettoria balistica (parabolica), mentre l'analisi biomeccanica (e indirettamente la bioenergetica) mostra che nella prima fase le energie potenziale e cinetica variano simultaneamente, come avviene in una molla che viene prima compressa e poi rilasciata [2]. L'atterraggio dalla fase di volo fa si che i

muscoli e i tendini debbano gestire questa diminuzione e successivo incremento dell'energia totale del baricentro, e la natura elastica dei tendini permette, anche in questa andatura, di conservare parte dell'energia meccanica totale in modo che i muscoli debbano fornire un lavoro inferiore a quello atteso sulla base della semplice traiettoria osservata. Possiamo dire che il paradigma locomotorio della corsa, la prima andatura rimbalzante, è il 'saltarello' ('pogo-stick' per gli anglosassoni), cioè quel bastone con pedane e molla incorporata che consente ai bambini di divertirsi saltando da un punto all'altro.

Il consueto repertorio locomotorio umano si fermerebbe qui se non ci fosse un'andatura che i bambini utilizzano occasionalmente in età preadolescenziale chiamata 'skipping' (la miglior corrispondenza in italiano è 'galoppino'). E' costituita da una combinazione (non solo cinematica) tra cammino e corsa, in quanto 2 passi eseguiti senza discontinuità con il terreno precedono una fase di volo [3]. Nonostante che l'analisi dinamica mostri anche un andamento delle energie potenziale e cinetica del baricentro corporeo simile a quello delle altre due andature, quindi con vantaggi attesi della combinazione dei rispettivi risparmi di energia meccanica totale (e i paradigmi pendolare e pogo-stick), lo skipping con il suo elevato costo energetico misurato e il suo utilizzo episodico rimane una curiosità fisiomeccanica nel repertorio locomotorio terrestre (la sua rilevanza emerge proprio in ipogravità, come si discuterà più avanti).

Per quanto riguarda la bioenergetica, che studia il costo metabolico della progressione alle diverse andature, le conoscenze acquisite indicano che il cammino è la modalità più economica per muoversi lungo un'unità di distanza (ed ha il minimo costo alla nostra velocità spontanea), la corsa è più costosa (e indipendente dalla sua velocità) e lo skipping lo è ancor di più, nonostante che lo si adotti a velocità intermedie tra cammino e corsa [3].

L'importanza di catalogare le andature in base ad un paradigma meccanico caratteristico ci consente di capire la dinamica della locomozione anche quando il numero di arti eccede il numero due: nei quadrupedi, ad esempio, il 'passo' corrisponde a due bipedi che camminano (sfasati del 25% del ciclo), il trotto equivale alla corsa (i due bipedi sono sfasati del 50%) e le diverse forme del galoppo possono essere viste come due umani che procedono con lo skipping (fase ≤50%). Quindi la loro biomeccanica segue gli stessi paradigmi che negli umani (3).

Dato che i 3 paradigmi coinvolgono in vario modo le dimensioni corporee (si pensi alla lunghezza del pendolo invertito) e la gravità

(energia potenziale e sue trasformazioni in cinetica) si capisce come le modificazioni di queste 2 variabili possano influire sulla praticabilità e sul costo metabolico delle differenti andature.

3. Invarianti per dimensioni corporee e gravità

Non stupisce che tra i due effetti citati sulla dinamica locomotoria quello delle dimensioni corporee sia stato il più studiato negli ultimi 40-50 anni. Uno dei contributi più originali è stato di importare in biologia una grandezza adimensionale introdotta da un ingegnere navale della fine del XX° secolo, William Froude, per rispondere alla domanda: a quale velocità i bambini, considerata la bassa statura, camminano in modo 'dinamicamente simile' al cammino dei propri genitori (risposta intuitiva: a una velocità più bassa, dato che è osservazione comune che se una mamma cammina alla propria velocità spontanea il bambino segue correndo). Il numero di Froude ($Fr = v^2/(g \cdot l)$, dove v è la velocità di progressione, g è l'accelerazione di gravità e l una lunghezza corporea caratteristica, ad esempio dell'arto inferiore), una grandezza sostanzialmente corrispondente al rapporto tra energia cinetica e potenziale, inventata per ottenere inferenze attendibili da modelli in scala sul comportamento dinamico della nave da costruire (la cui velocità dipendeva - anche - dall'altezza dell'onda innalzata dalla prua), è stato adottato dai biomeccanici come invariante, sia per i bipedi che per i quadrupedi (e ulteriormente estendibile), nel confronto locomotorio tra taglie differenti [4]. Per tutti (grandi e piccoli, bipedi e quadrupedi) è risultato Fr = 0.25 come la velocità adimensionale per la similarità dinamica quando il cammino è metabolicamente ottimale, Fr = 0.5 per quella di transizione dal cammino alla corsa, con Fr = 1 che costituisce il limite di velocità oltre il quale il cammino non è più meccanicamente utilizzabile ed è necessario passare ad andature rimbalzanti. Ritornando all'esempio citato, un bambino alto la metà della madre camminerà in modo dinamicamente simile a lei (cioè uguale Fr) se adotterà una velocità del 30% inferiore ($\sqrt{0.5}$=0.7, 1-0.7= -30%). Il numero di Froude per i confronti locomotori di soggetti di dimensioni differenti, e durante l'accrescimento corporeo, ha fornito importanti risultati negli ultimi decenni [5, 6, 7]. Essenzialmente si sono valutate le interrelazioni tra velocità e lunghezza caratteristica a parità di gravità.

Ma Froude permette anche di studiare le relazioni tra velocità e gra-

vità, a parità di lunghezza (della gamba, ad esempio). Una tipica domanda alla quale si può rispondere è: rispetto alla propria velocità spontanea del cammino sulla Terra, uno stesso soggetto (cioè con le stesse dimensioni corporee) a che velocità camminerebbe sulla Luna (g/6) in modo dinamicamente equivalente'? Al 40% (1/6=0.16 e √0.16=40%) di circa 5.5 km/h, dunque a circa 2.4 km/h. Questo semplice, ed approssimato risultato ci indica che gli scambi pendolari tipici del nostro modo di camminare limitano la nostra velocità massima in condizioni di ipogravità. Molti dei risultati pubblicati su lavori sperimentali di emulazioni ipo- e iper-gravitarie [8] di locomozione umana, sia di tipo biomeccanico che metabolico, sono tra di loro equivalenti se espressi in termini di Fr [9]. Oggi che il primo atterraggio su Marte (0.38g) si prefigura, possiamo anticipare che la caratteristica velocità ottimale di cammino e quella di transizione con la corsa avverranno, per mantenere Fr costante e uguale a 0.25 e 0.5, rispettivamente, a velocità pari al 62% (=√0.4) di quelle Terrestri, e cioè a 3.4 e 4.7 km/h [9]. Queste sono prime stime approssimative, che potrebbero essere raffinate dall'incorporare variazioni di momento d'inerzia corporea e di massa aggiunta come abbigliamento spaziale e altre attrezzature 'indossabili'.

Abbiamo parlato del numero di Froude come strumento per considerare 1) gli effetti della taglia sulla velocità del cammino, a parità di gravità, e 2) gli effetti della gravità sulla velocità, a parità di dimensioni corporee. E' chiaro che si può anche uscire da questo schema a sfondo didascalico, e pensare che Fr possa servire a trovare le velocità dinamicamente equivalenti quando sia la gravità che la taglia possano variare, come avverrà per gli esploratori di differenti eso-pianeti.

Un ultimo commento in questa sezione riguarda andature diverse dal cammino e dalla corsa, ad esempio il citato 'skipping', che in virtù di un paradigma meccanico che incorpora anche trasferimenti di energia di tipo pendolare [3], può avvalersi della capacità di standardizzazione della velocità, e soprattutto di quella delle transizioni con cammino e corsa, introdotte dal numero di Froude.

4. Evidenze dalle esplorazioni Lunari

Il programma Google Earth (Google LLC, USA), oltre a permettere esplorazioni virtuali dettagliate in 3D della superficie terrestre, contiene

una grande varietà di informazioni collegate al nostro satellite e alle missioni Apollo che negli anni '60 dello scorso secolo sono avvenute, con preciso riferimento alle zone lunari interessate. E' così possibile, per la ricchezza, varietà e risoluzione dei video e delle fotografie riprese in quelle occasioni e messe oggi a disposizione dal software, avere testimonianza anche delle limitazioni alla locomozione che l'ambiente ipogravitario, l'orografia e il particolare terreno polveroso (coperto da uno spesso strato di regoliti) imponevano agli astronauti. Un numero cospicuo di riprese video infatti mostra come non fosse affatto semplice provare a camminare in modo 'classico', se non a bassa velocità, come previsto dal numero di Froude. Dopo una fase di familiarizzazione, i componenti delle missioni hanno riscoperto lo skipping, particolarmente utile in piano, mentre per le discese veniva usato l'hopping, andatura a salti con piedi uniti, e comunque raramente accennavano a correre. Una tale situazione di locomotoria era stata in parte prevista negli anni immediatamente precedenti alle missioni Apollo dagli studi dei Professori Rodolfo Margaria e Giovanni Cavagna dell'Università degli Studi di Milano, che avevano pronosticato le difficoltà del cammino e il ricorso ai salti 'a balzelloni' [8].

5. Esperimenti emulativi: il cavedio ipogravitario milanese

Gli esperimenti milanesi si basavano sull'uso di un alto cavedio dell'Istituto di Fisiologia, dove erano state installate lunghe bande elastiche che, connesse ad una imbragatura e pretensionate opportunamente, sgravavano il peso corporeo in modo tale da emulare la gravità lunare. I soggetti eseguivano serie di salti in verticale e la loro forza di reazione al terreno veniva registrata da una piattaforma dinamometrica.

Questo 'cavedio ipogravitario' è stato restaurato, messo in opera nuovamente alcuni anni fa ed equipaggiato con strumentazioni più complete e aggiornate (si veda *Fig. 1*), avendo incluso anche un nastro trasportatore che consente studi locomotori e un sistema di analisi 3D del movimento corporeo che utilizza 10 telecamere e marcatori riflettenti posizionati sui principali giunti articolari e segmenti scheletrici. E' stato così possibile espandere le conoscenze delle differenti andature in ipogravità di diversa entità, sia dal punto di vista biomeccanico che da quello metabolico, misurando anche il dispendio energetico con un metabografo dedicato all'analisi dei gas espirati respiro-per-respiro [10,

11, 12]. I risultati finora prodotti sono sintetizzati nella *Fig. 2*. La chiave di lettura più sintetica possibile della figura è la seguente. Al limite destro (Terra) possiamo notare che le andature ottimali terrestri sono il cammino (W), per velocità fino a quasi 2 m/s (7 Km/h), e la corsa (R) a velocità superiori (Skipping e Balzi sono molto più costosi). Muovendoci verso il limite a sinistra (Luna) l'ambito delle velocità praticabili del cammino si riduce considerevolmente, inizialmente a vantaggio della corsa, ma verso la fine del percorso notiamo che si affacciano altre forme di locomozione metabolicamente più economiche, e biomeccanicamente più utilizzabili, come lo skipping (S) e i balzi a piedi uniti (H), che alla gravità lunare finiscono per soppiantare la corsa. A gravità marziana ci si aspetta che siano ancora fattibili cammino, corsa e skipping (come riportato, forse per l'intervento di aggiornati consulenti, in recenti film di fantascienza, *e.g.* [13]) mentre l'andatura a balzi sarebbe ancora troppo costosa. La curva a tratto spesso che attraversa il grafico costituisce la velocità teorica di transizione tra cammino e corsa alle differenti ipo-gravità, come suggerita dal criterio di similarità dinamica (Fr = 0.5, dall'equazione sopra riportata si può ricavare che la curva è un arco di parabola invertita). Sulla Luna è necessario passare dal cammino alle andature rimbalzanti a velocità così bassa da fare adottare quasi in modo esclusivo queste ultime (skipping e balzi) al fine di ottenere una locomozione spedita.

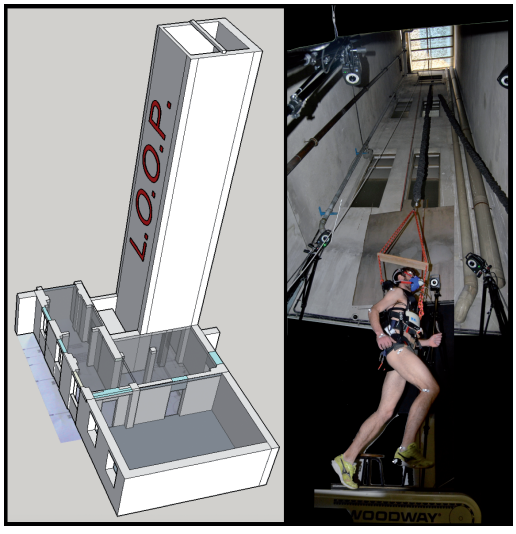


Fig. 1. A sinistra, planimetria 3D del Cavedio ipo gravitario dell'Università di Milano che, agli effetti dell'accreditamento ESA, si chiamerà LOOP (Locomotion On Other Planets Analogue). A destra un soggetto corre mentre l'imbragatura, tramite i lunghi elastici pre-tensionati, rimuove l'83% del suo peso, emulando la forza peso lunare. Si può notare il nastro trasportatore, la maschera del metabografo per le misure di costo energetico, e le telecamere per l'analisi biomeccanica del movimento.

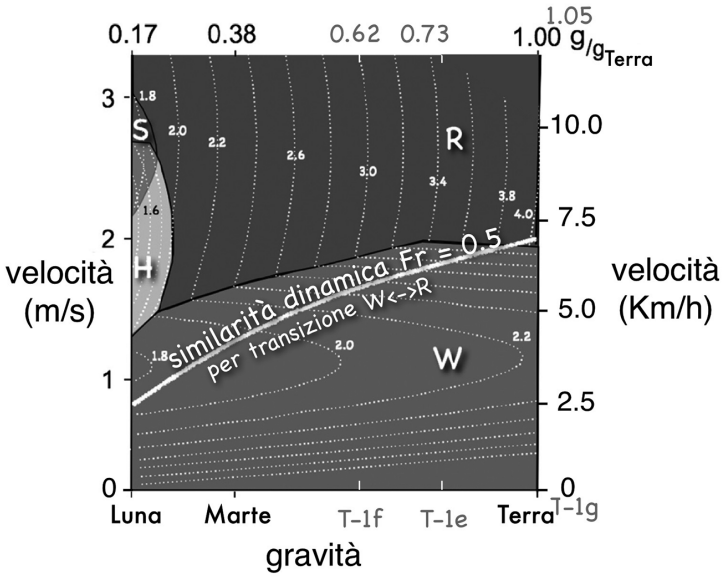


Fig. 2. In ascissa l'accelerazione di gravità: valori (relativi alla gravità terrestre) riportati in alto, corpi celesti corrispondenti sull'asse inferiore (T-1f, T-1, e T-1g si riferiscono agli esopianeti Trappist recentemente scoperti). In ordinata è riportata la velocità di progressione. Nel grafico i simboli sono: W – cammino, R – corsa, S – skipping, H – balzi o hopping (le curve nere delimitano le zone locomotorie delle andature metabolicamente ottimali ottenute da esperimenti emulativi nel cavedio ipogravitario [12]). I numeri all'interno del grafico sono i valori di costo metabolico della locomozione (in J/(kg m)) di alcune curve iso-valore (puntinate bianche) nelle zone riguardanti le diverse andature. La curva bianca rappresenta Fr = 0.5, cioè le combinazioni velocità/gravità dove per la teoria della Similarità Dinamica [4] dobbiamo aspettarci la velocità di transizione tra il cammino e la corsa, alle differenti gravità. Il grafico è adattato da [12].

Tutte queste considerazioni sull'adattamento locomotorio dei bipedi (umani e non) a campi gravitazionali differenti si applicherebbero, per analogia dei paradigmi biomeccanici, ad animali quadrupedi: un cane-gatto-cavallo sulla Luna, ad esempio, si troverebbe spontaneamente a limitare/eliminare il trotto (analogo della corsa) e soprattutto a galoppare (l'analogo dello skipping), iniziando già dalle basse velocità.

Ultima considerazione riguarda il dispendio energetico: i dati hanno mostrato che se sulla Terra il costo metabolico del cammino è il più basso, seguito dalla corsa (≈x2), dallo skipping (≈x3) e dai balzi (≈x10),

a gravità lunare le tre andature riportano costi energetici pressoché identici. Questo risultato sembra indicare che un determinante cruciale del costo della locomozione sia il contrasto muscolare al vettore gravitario, e potrebbe aiutare a spiegare alcuni aspetti ancora oscuri particolarmente delle andature rimbalzanti come la corsa sulla Terra.

Il cavedio ipogravitario dell'Università di Milano è al momento oggetto di ulteriori rinnovamenti e ampliamenti in vista dell'accreditamento come 'Ground Based Facility' della European Space Agency, che lo aprirà a progetti multicentrici di ricerca internazionale.

6. Prospettive e conclusioni

Nonostante che gli adattamenti locomotori a condizioni di gravità differenti da quella terrestre siano stati in parte già delineati, ci sono aspetti biomeccanici e neuromotori più fini che devono ancora essere studiati. Da un lato, l'unità muscolo-tendinea deve fronteggiare, in ipogravità, nuove sfide per realizzare la cosiddetta 'power amplification', cioè l'azione combinata di (limitata) attività muscolare e (sostanziale) intervento in accumulo e restituzione di energia elastica da parte del tendine, aspetti investigabili presso strutture come il cavedio con strumentazioni biomeccaniche, elettromiografiche ed ecografiche (per valutare le modificazioni di lunghezza di muscolo e tendine separatamente). Dall'altro, l'evoluzione più a lungo termine delle esplorazioni spaziali implicherà un parallelo e ulteriore sviluppo di attrezzature per la sopravvivenza in condizioni climatiche, termiche e respiratorie che sicuramente interagiranno con gli adattamenti neurobiomeccanici attesi solamente sulla base delle differenti gravità.

7. Ringraziamenti

L'autore ringrazia l'Istituto Lombardo Accademia di Scienze e Lettere per avere ospitato nella Sala delle Adunanze la Conferenza del Centro Linceo di Ricerca "Beniamino Segre" che ha tenuto in veste di Professore Distaccato giovedì 29 novembre 2018, e il Prof. Edgardo D'Angelo, per l'introduzione.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

1. Cavagna GA, Margaria R, Mechanics of walking. *J Appl Physiol* 1966: 21: 271-278.
2. Cavagna GA, Saibene F, Margaria R, Mechanical work in running. *J Appl Physiol* 1964: 19: 249-252.
3. Minetti AE, The biomechanics of skipping gaits: a third locomotor paradigm? *Proc R Soc B* 1998: 265: 1227-1235.
4. Alexander RMcN, Optimization and gaits in the locomotion of vertebrates. *Physiol Rev* 1989: 69: 1199-1227.
5. Minetti AE, Saibene F, Ardigò L, Atchou G, Schena F, Ferretti G, Pygmy locomotion. *Eur J Appl Physiol* 1994: 68: 285-290.
6. Minetti AE, Ardigò L, Saibene F, Ferrero S, Sartorio A, Mechanical and metabolic profile of locomotion in adults with childhood-onset GH deficiency. *Eur J Endocr* 2000: 142 (1): 35-41.
7. Saibene F, Minetti AE, Biomechanical and physiological aspects of legged locomotion in humans. *Eur J Appl Physiol* 2003: 88: 297-316.
8. Margaria R, Cavagna G, Human locomotion in subgravity. *Aerospace Med* 1964: 35: 1140-1146.
9. Minetti AE, Walking on other planets. *Nature* 2001: 409: 467-469.
10. Minetti AE, Pavei G, Biancardi CM, The energetics and mechanics of level and gradient skipping: preliminary results for a potential gait of choice in low gravity environments. *Planetary and Space Science* 2012: 74: 142-145.
11. Pavei G, Biancardi CM, Minetti AE, Skipping vs. Running as the bipedal gait of choice in hypogravity. *J Appl Physiol* 2015: 119(1): 93-100.
12. Pavei G, Minetti AE, Hopping locomotion at different gravity: metabolism and mechanics in humans. *J Appl Physiol* 2015: 120(10): 1223-1229.
13. 'John Carpenter' film, Walt Disney Pictures, 2012.

Istituto Lombardo (Rend. Scienze) 152, 183-200 (2018)

MARIA GAETANA AGNESI, *ENFANT PRODIGE*, MATEMATICA, PIA NOBILDONNA

UMBERTO BOTTAZZINI (*)

Nota presentata dal m.e. Carlo Domenico Pagani
(Adunanza del 20 dicembre 2018)

SUNTO. – Maria Gaetana Agnesi (1718-1799) è stata una figura di primo piano nella Milano del Settecento. Bimba prodigio, attrazione nelle dispute scientifiche e filosofiche organizzate nella casa paterna, è stata la prima donna a pubblicare un trattato di matematica, le *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana* (1748) una chiara e sistematica esposizione della geometria cartesiana e dell'analisi infinitesimale. Tra le curve studiate in quell'opera figura la *versiera*, la cubica cui è associato il suo nome. Nominata dal Papa Benedetto XIV nel 1750 sulla cattedra di matematica dell'università di Bologna, non accettò quell'incarico e, dopo la morte del padre nel 1752, abbandonò la matematica per dedicarsi interamente a opere pie, e all'assistenza delle donne povere e malate nel Pio Albergo Trivulzio, dove trascorse gli ultimi quindici anni di vita.

***

ABSTRACT. – Maria Gaetana Agnesi (1718-1799) was a prominent figure in eighteenth-century Milan. A child prodigy, and an attraction in the scientific and philosophical disputes organized in the paternal home, she was the first woman to publish a mathematical treatise, the *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana* (1748), a clear and systematic presentation of both Cartesian geometry and infinitesimal analysis. Among the curves studied in that work is the *versiera*, (*witch*) the cubic curve that is still associated with her name. Appointed by Pope Benedict XIV in 1750 on the chair of mathematics at the University of Bologna, she did not accept that assignment. After her father's death in 1752, she left mathematics to devote herself entirely to pious works, and to taking care of poor and infirm women in the Pio Albergo Trivulzio, where she spent the last fifteen years of life.

(*) ex-Dipartimento di matematica 'F. Enriques', Università degli Studi di Milano, Italy. E-mail: umberto.bottazzini@unimi.it

UN *ENFANT PRODIGE*

Non si potrebbe definire altrimenti la piccola Maria Gaetana, nata il 16 maggio 1718, figlia primogenita di Don Pietro Agnesi Mariani e di Donna Anna Brivio. Don Pietro, un ricco mercante milanese che coi danari ha acquisito il titolo di "Regio Feudatario di Monteveglia o Montevegghia e delle sue pertinenze", è "d'animo ben fatto e nobile, di non mediocri sostanze fornito", si legge nell' *Elogio storico di D[a] Maria Gaetana Agnesi milanese*, apparso anonimo nel 1799, lo stesso anno della morte dell'Agnesi, ma in realtà opera di Anton Francesco Frisi, canonico della basilica di Santo Stefano, familiare in casa Agnesi e fratello del ben più celebre matematico e astronomo, il barnabita Paolo. Nell'*Elogio* Frisi attinge ai ricordi e alle più intime confidenze fattegli dalla sua assidua e devota parrocchiana nel corso di un'amicizia protrattasi per decenni. La piccola Maria Gaetana, scrive Frisi, è dotata di "un singolarissimo talento, d'un impaziente natural genio per le Nozioni scientifiche, e di una mirabil memoria" che ne fanno ben presto l'attrazione di casa Agnesi. A cinque anni la bimba "parla mirabilmente francese", in maniera forse più dolce e sublime di una fanciulla nata sulle sponde della Senna. "Con vezzo tale, e con sì pronta vena / il franco dir gentil fanciulla esprime / che in più dolce maniera, e più sublime / ninfa forse non parla in su la Sena", assicurano i versi di un elogiativo sonetto opera di un (anonimo) "dotto ingegno" dell'epoca.

Incurante della tradizione, che privilegia l'educazione dei maschi, nella fattispecie lo (svogliato) fratello minore Giacomo, don Pietro si rende conto ben presto delle straordinarie doti della figlia primogenita e l'affida alle cure di un precettore, l'abate Niccolò Gemelli, che la istruisce nella lingua di Cicerone. In breve volger di tempo Maria Gaetana la padroneggia al punto da esibirsi in pubblico in un'orazione latina, quando non ha ancora compiuto nove anni. La sera del 18 agosto 1727, nel giardino della casa in via del Pantano affollato di invitati, la piccola recita un'orazione in cui sostiene che il gentil sesso non è per nulla alieno dallo studio delle arti liberali (*Oratio, qua ostenditur: artium liberalium studia a femineo sexu neutiquam aborrere*). All'epoca la questione è argomento di dotte discussioni nelle accademie. C'è chi sostiene che danni e rovine incalcolabili deriverebbero alla società dal "sovvertir l'ordine (dicesi) delle cose" consentendo alle donne di accedere alle più alte speculazioni filosofiche o allo studio delle scienze e delle arti, giacché la loro natura è prendersi cura del marito, dei figli e

delle faccende domestiche "e non impacciarsi d'altro che dell'ago e del fuso", e chi invece condivide le idee esposte nella sua orazione da Maria Gaetana, che si contrappone con dovizia di argomenti agli irragionevoli nemici dell'emancipazione culturale femminile (*muliebris sapientiae insensissimis hostibus*). Certo, l'orazione è stata composta (in italiano) dal suo precettore, lei si è limitata a tradurla in latino e recitarla a memoria davanti a un pubblico di nobiluomini, letterati e professori invitati dal padre, ma di fatto quella recita inaugura una consuetudine di riunioni e serate che negli anni a venire vedranno protagonista la giovane. Non solo il latino padroneggia Maria Gaetana. Sotto la guida dell'abate Girolamo Tagliazucchi, che ha lasciato Modena per stabilirsi a Milano come lettore di greco, si immerge nello studio del greco, riempie pagine e pagine di vocaboli greci coi corrispondenti in latino, col risultato che, a soli undici anni, conosce il greco al punto da riuscire a tradurre a prima vista gli autori greci in latino. Adottando lo stesso sistema, e compilando elenchi di vocaboli, "per propria istruzione" impara anche l'ebraico, che si aggiunge al francese e al tedesco.

Insieme alla sorella Maria Teresa, che coltivava lo studio del clavicembalo, Maria Gaetana era solita trascorrere dei periodi a Montevecchia accompagnata dai precettori. Nel dicembre 1730 durante uno di quei soggiorni, racconta Frisi, "attendendo con eccessivo fervore alla coltura delle Lettere, trovossi sorpresa in campagna da un'ostinata malattia" che dai medici venne attribuita alla "applicazione non meno che alla vita sedentaria, come per uso suole accader alle persone di Lettere". Come rimedio, dai medici le fu consigliato il ballo e il cavalcare, e la fanciulla "ne divenne ben presto appassionatissima". Ma le cose non migliorarono, anzi andarono di male in peggio. Sempre a dire di Frisi, "alterato il suo fisico e per l'insolito moto considerevole, e pel frequente mutar d'abiti fu in breve assalita da uno strano male convulsivo, forzata più volte al giorno per impeto del medesimo a saltellare da sé, senza poter esser trattenuta da' domestici, se non con fatica". In quello stesso periodo, a quel misterioso male convulsivo si aggiunse per Maria Gaetana il dolore per la perdita della madre, morta di parto a soli 33 anni. "La stranezza di questo malore, non ispiegata né compresa da' Fisici, pose in timore i Parenti di una peggiore conseguenza" racconta ancora Frisi. Alla giovinetta venne allora raccomandato "con efficaci esortazioni" di "moderarsi nel ballo, nel cavalcare e nel cangiare di abiti". Di suo Maria Gaetana, "eccitata eziandio da' tratti di una connaturale pietà", ci mise le preghiere alla Vergine di intercedere presso

Dio per la sua salute, nonché gli esercizi spirituali e la devozione a san Gaetano Thiene, fondatore dell'ordine dei chierici teatini. Quella "connaturale pietà" era stata alimentata dal direttore spirituale cui don Pietro l'aveva affidata, il teatino Giuseppe Reina, che aveva dato alla bimba quando aveva sette anni un libro di esercizi spirituali e culto del fondatore. Fatto sta che, vuoi per i mutamenti radicali nello stile di vita, vuoi per l'efficacia delle esortazioni, o per l'intercessione dei protettori celesti, quelle misteriose convulsioni sparirono per sempre dalla sua vita. Quanto a don Pietro, lasciato dalla morte della moglie con cinque figlie femmine e due maschi, mise ben presto fine alla vedovanza sposando nel 1734 la ventenne Marianna Pezzi che in tre anni gli diede due altri figli maschi prima di morire di mal sottile.

La formazione filosofica e matematica

"Per ubbidire al padre", racconta ancora Frisi, nel 1737 la giovane adolescente era passata "agli ardui e sublimi studi della filosofia" per i quali mostrava "una fortissima propensione" tanto che "l'avveduto Genitore, e la folta corona dei dotti amici che frequentavano la di lui casa, a pieni voti concorsero nella determinazione di far liberamente entrare ne' vasti campi della Filosofia, e delle Matematiche una Fanciulla di tanta espettazione". Tra quei dotti amici c'erano i padri Francesco Manara, professore di Fisica sperimentale all'università di Pavia, nominato in seguito Generale dell'Ordine somasco, e Michele Casati, professore di filosofia all'università di Torino e, dal 1754, vescovo di Mondovì. Sotto la loro guida Maria Gaetana apprese la geometria degli *Elementi* di Euclide, la Logica e Metafisica, e la Fisica generale, particolare e sperimentale. Ai precettori si affiancava il conte Carlo Belloni, assiduo frequentatore di casa Agnesi, "filosofo e matematico, giureconsulto collegiato e decurione della città di Pavia". A dire di Frisi, in quei "vasti campi" la giovane compì i primi passi che si mutarono ben presto in "rapidi e sublimi voli".

Qual era lo stato di "quegli ardui e sublimi studi" nella Milano del tempo? Nelle parole di un testimone dell'epoca come Pietro Verri, in campo scientifico "erano ignote le nuove scoperte nelle scienze fisiche e matematiche". Né più lusinghiero era lo stato degli studi umanisti. "Il pensare era un vizio, lo studio era imparare i pensieri altrui. Imitar Cicerone nel giro e nella scelta delle parole; porsi in mente un numero

grande di leggi e opinioni di Dottori; esercitarsi a sostenere con animo imperterrito, e contro qualunque evidenza una opinione scolastica". Ecco l'immagine dei "pregi" e del "piano di educazione pubblica" che Verri ci offre nelle *Memorie appartenenti alla vita ed agli studj del signor don Paolo Frisi* (1787). "Quella che chiamavasi Filosofia", continua Verri, era "un impasto di opinioni Aristoteliche, e di immaginazioni Cartesiane". Ne aveva fornito un esempio paradigmatico Edmord Purchot con i cinque tomi delle sue *Institutiones philosophicae* (1711), più volte ristampate in Italia negli anni Venti e Trenta del Settecento, che i suoi precettori avevano messo nelle mani della giovane. I primi quattro volumi delle *Institutiones* erano dedicati rispettivamente a logica e metafisica; geometria e physica generalis, physica specialis, ethica – e corrispondono agli argomenti dell'educazione scientifica e filosofica di Maria Gaetana ricordati da Frisi – mentre nel quinto tomo erano raccolte una serie di tesi filosofiche attinenti agli argomenti trattati nei precedenti volumi (ex *prolegominis*, logica, metafisica, etica e così via).

In realtà, l'interesse della giovane per argomenti di natura meccanica e geometrica risaliva a ben prima del 1737, come peraltro dimostra lo stesso Frisi producendo una lettera del padre Manara del 26 aprile 1733, che testimonia delle conoscenze di balistica di una Agnesi non ancora quindicenne. Al conte Belloni, invece, Maria Gaetana sottopone una propria soluzione del seguente problema geometrico: determinare il luogo dei punti in cui le rette uscenti da un punto dato incontrano sotto un angolo retto una famiglia di parabole coassiali e con lo stesso vertice, trovando che il luogo cercato è un'ellisse. Con la guida del conte Belloni intraprende lo studio del *Traité analytique des sections coniques* del marchese de l'Hopital, pubblicato postumo nel 1707, un'opera certo non alla portata di chi conosce appena i rudimenti della geometria. Lo stesso conte, in una lettera del 3 luglio 1735, le chiarisce alcune difficoltà incontrate nello studio del trattato de l'Hopital, aggiungendo "è certo che, se il marchese dell'Ospitale dilettavasi di questa sorta di computi, non mi meraviglio punto ch'e' sia morto giovane, perché eglino sono nati fatti per ammazzare chicchessia, cui prenda vaghezza di provarvisi", quasi consigliandola poi, "se ve ne fossero molti di questo taglio", di abbandonare lo studio di quell'opera. (Studi e corrispondenze sopra vari punti del trattato dell'Hopital per mano di Agnesi, del conte Bellone, e di altri, sono conservati tra i suoi manoscritti.) Se mai lei ebbe in animo di scrivere un commento al trattato, lasciò tuttavia cadere il progetto man mano che, negli anni seguenti,

cresceva la sua conoscenza e padronanza dei metodi della nuova analisi infinitesimale. Testimonianza di una grande consuetudine di rapporti, al conte Belloni sono dedicate le *Propositiones philosophicae* (1738) che raccolgono le 191 tesi che Maria Gaetana aveva difeso "esponendosi a una general disputa" svoltasi nella sua casa all'inizio di quell'anno alla presenza dei "principali Ministri e Senatori e più celebri Letterati di Milano" (*Fig. 1*).


PROPOSITIONES
PHILOSOPHICAE,
QUAS CREBRIS DISPUTATIONIBUS DOMI HABITIS
CORAM CLARISSIMIS VIRIS EXPLICABAT
EXTEMPORE, ET AB OBJECTIS
VINDICABAT
MARIA CAJETANA
DE AGNESIIS
MEDIOLANENSIS.
MEDIOLANI, MDCCXXXVIII.
In Curia Regia, per Joseph Richinum Malateftam
Regium, Ducalemque Typographum.
SUPERIORUM PERMISSU.

Fig. 1.

"Le discipline matematiche debbono essere ascritte a parti della filosofia", si legge nei *Prolegomena* delle *Propositiones*, anzi, sono le sole "discipline che a buon diritto rivendicano rispetto ad altre il nome di scienza, dal momento che ci conducono con assoluta certezza (*certissime*) a raggiungere e contemplare la verità, del che nulla può essere più piacevole (*quo nihil jucundius esse potest*)". All'introduzione (I-VI) fanno seguito le tesi di Logica (VII-XVI), di Ontologia (XVII-XIX), di Pneumatologia (XX-XXXVI). Seguono le tesi di Fisica generale, dei corpi e dei moti in generale (XXXVII-LVIII), i principi della Meccanica e del moto dei gravi, in caduta libera o su piani inclinati, dei pendoli e dei proiettili (LIX-LXVIII), la Statica e l'Idrostatica, l'Idrodinamica e l'Idraulica, l'urto di corpi elastici e anelastici (LXIX-LXXIV), svariate questioni sulle qualità (fisiche e chimiche) dei corpi (LXXV-CV) e infine, le tesi di Fisica 'particolare', dal sistema del mondo alla terra, i mari, i fossili, le piante, gli animali (compreso l'uomo) (CVI-CXCI). Insomma, uno sfoggio di straordinaria cultura enciclopedica, che consente a Maria Gaetana di passare da un campo del

sapere all'altro e che tuttavia, come ha sottolineato A. Masotti, non rivela particolare originalità e profondità di pensiero. Tuttavia, a dispetto delle affermazioni di Verri, nel campo della fisica e della meccanica Agnesi si rivela al corrente delle recenti teorie newtoniane, alle quali riserva la sua convinta adesione accompagnandola con critiche puntuali alla fisica cartesiana. D'altra parte, è solo il caso di ricordare che l'anno precedente era stato pubblicato il *Neutonianesimo per le dame* (1737) di Francesco Algarotti, un testo in gran voga nei salotti dell'epoca.

La serata in cui Maria Gaetana aveva sostenuto la "general disputa" all'origine delle *Propositiones* non doveva esser stata molto diversa da quella che descrive un ammirato Charles de Brosses, il futuro presidente del Parlamento di Digione, di passaggio a Milano nel maggio 1739. Nelle sue *Lettres historiques et critiques sur l'Italie* (apparse postume nel 1799), egli definisce la signora Agnery (sic!) "una specie di fenomeno letterario", che gli "è sembrato *una causa* (sic!) *più stupenda* del duomo di Milano". La testimonianza di de Brosses continua raccontando che lo "hanno fatto entrare in un salone grande e bello dove c'erano trenta persone di tutta Europa disposte in circolo e la signorina Agnesi seduta da sola con la sorellina su un canapé". Egli si aspettava "una comune conversazione" con Maria Gaetana, ma il conte Belloni aveva disposto le cose altrimenti. Con "una bella arringa", in latino in modo che tutti capissero, aveva dato il via a "una specie di pubblica esibizione" della giovane, e poi invitato de Bosses a "disputare con lei su qualunque argomento" egli volesse, costringendo lo stupefatto visitatore ad improvvisare un discorso in latino sulla maniera in cui "l'anima comunica agli organi del cervello" la percezione degli oggetti fisici e sull'emanazione della luce. Con un altro interlocutore Agnesi si intrattenne invece sulle proprietà di certe curve geometriche, prima che la discussione si facesse generale, con gli invitati che ponevano quesiti ciascuno nella propria lingua, la stessa che Agnesi adottava nella risposta.

"È una appassionata sostenitrice della filosofia di Newton" annota de Brosses, ma ciò che lo lascia stupefatto, più che la dottrina dell'Agnesi, è la sua padronanza del latino. "Mi dice che è assai scontenta che la visita abbia preso la forma d'una discussione di tesi; che lei non amava affatto parlare di cose simili in una compagnia dove, per uno che si diverte, venti si annoiano mentre la cosa andava bene se fatta tra due o tre persone con gli stessi gusti". Infine, la serata si concluse con una esibizione della sorella Maria Teresa al clavicembalo. In fondo, non dissimile era stata la serata organizzata per il principe di Wolfenbüttel,

erede al trono di Polonia, di passaggio a Milano. Maria Gaetana la descrive per lettera a padre Casati, raccontando che il principe "desiderava ascoltare mia sorella [Maria Teresa] suonare il clavicembalo e me parlare di cose filosofiche". Lei aveva sostenuto una prima disputa "intorno alla causa del moto dei pianeti" e poi un'altra "sulla natura dei colori". Infine il principe "sentì Teresa cantare e suonare il cembalo e noi due insieme (perché potesse ben dormire dall'uno e dall'altro occhio) gli facemmo sentire una melodia su quel dolcissimo strumento che prende il nome dall'amore" (la viola d'amore).

Concludendo la descrizione della serata in casa Agnesi De Brosses riportava, con dispiacere misto a stupore, di aver sentito dire che la sua ospite aveva intenzione di chiudersi in un convento "certo non per necessità, poiché è molto ricca". Le voci raccolte dal visitatore francese erano ben fondate. Raggiunti i vent'anni, Maria Gaetana comunicò infatti al genitore la sua determinazione di "ritirarsi dal Mondo e abbracciare il solitario Istituto delle Religiose" dette Carcanine, dal nome del fondatore Pietro Carcano (l'ordine era già stato soppresso nel 1799 quando Frisi scrive l'*Elogio*). Si può facilmente immaginare la reazione del padre: don Pietro "restò come da un fulmine colto e sorpreso da istanza sì inopinata", riporta Frisi e non si fatica a credergli. Tuttavia, "accortasi dell'aspra ferita che recava al cuore di un padre che tanto l'amava, e dai cenni del quale essa fino ad allora aveva voluto scrupolosamente dipendere, anche col totale sagrificio delle sue più naturali aspirazioni", aggiunge Frisi, Maria Gaetana rinunciò al ritiro monacale ma chiese di vestire dimessamente, andare in chiesa quando lo desiderava e abbandonare balli, teatri e divertimenti mondani. Cosa che gli fu senz'altro concessa da don Pietro che, in quello stesso anno, passò a terze nozze con Antonia Bonati, dalla quale avrà 11 figli in 12 anni (!).

Allieva di padre Rampinelli

Nel 1740 dai Superiori della Congregazione di Monte Oliveto venne destinato ad insegnare matematica e fisica al Monastero di S. Vittore a Milano il celebre padre Ramiro Rampinelli, accompagnato da fama di grande matematico (sarà poi professore di matematica all'Università di Pavia). A Bologna Rampinelli era stato infatti introdotto ai metodi della moderna analisi da Gabriele Manfredi, uno dei più profondi e originali cultori del calcolo leibniziano e, presi i voti, aveva trascorso un periodo a

Padova dove divenne allievo di Jacopo Riccati, col quale strinse una duratura amicizia, prima di esser destinato ad insegnare matematica in monasteri di Roma e Bologna. Avuta notizia della sua venuta in città, don Pietro si affrettò a farne la conoscenza e a invitarlo a frequentare la propria casa, dove per Rampinelli non fu "difficile lo scoprire in Maria Gaetana il vivo anelante desiderio di internarsi ne' più profondi recessi delle Matematiche", assicura Frisi facendo proprie le parole di un Elogio del monaco matematico, premesso all'edizione delle sue *Lectiones opticae* (1760): "Scorta in lei tanta penetrazione, e tanto ordine d'idee, prese di buon grado a condurla nelle più riposte, e astruse meditazioni Geometriche, e ad esercitarla nella risoluzione de' più oscuri e difficili Problemi dell'Algebra".

L'incontro con padre Rampinelli rappresentò una svolta decisiva nella formazione matematica di Maria Gaetana. "Con tutto lo studio, ch'io mi sono sforzata di fare da me medesima sostenuto dalla più forte inclinazione per questa scienza, mi troverei tuttavia intricata nel labirinto d'insuperabili difficoltà se tratta non me ne avesse la sicura guida, e saggia direzione del dottissimo Padre", riconoscerà lei stessa nella Prefazione alle *Instituzioni analitiche.* In una lettera del 9 giugno 1745 lo stesso Rampinelli la presenta a Giordano Riccati come "molto versata nelle lingue Latina, Greca, ed anco Ebrea, oltre altre più famigliari; di più molto dotta nelle migliori Metafisiche, e nella moda Fisica, nella Geometria, e nelle Mecaniche quanto basta per la Fisica, aveva qualche notizia nell'algebra cartesiana, ma acquistata da sé, perché non aveva qui chi potesse darle lume". La sua allieva, continua Rampinelli, "in poco tempo con robustezza e profondità di talento straordinaria si è impossessata a meraviglia della Cartesiana, e de' due Calcoli infinitesimali, al che si ha aggiunta l'applicazione di essi alle cose fisiche più sublimi". In chiusura, non manca una nota di genere. Rampinelli confessa il suo stupore nel "vedere tanto talento, e tanto fondo di sapere in una Donna, che sarebbe particolare in un Uomo, e massime il vedere l'accompagnamento di una virtù morale cristiana molto particolare". All'epoca, grazie a quanto appreso dallo stesso Rampinelli e dalle molte letture fatte, Maria Gaetana "ha formato un corpo, che si può chiamare una compita istituzione d'Analisi" che suo padre don Pietro Agnesi "avrebbe caro, che si pubblicasse". Le future *Istituzioni analitiche* sono in corso di redazione e Rampinelli chiede a Giordano (e, attraverso di lui, a Jacopo Riccati) di "prendersi la briga d'andar leggendo le scritture" man mano che la sua allieva le viene ultimando.

Forte della presentazione di padre Rampinelli, il 20 luglio Maria Gaetana sottopone quanto ha fino ad allora realizzato sull' "analisi Cartesiana" all' "oracolo accertatissimo" di Jacopo Riccati e alla "dotta sua critica". La risposta non si lascia attendere. "Sono rimasto sopra-fatto nello scorrere un compiuto trattato di Analisi Cartesiana, che una giovine Dama poggi tant'alto in materie così delicate ed astruse", le scrive Jacopo Riccati aggiungendo di aver trasmesso il testo per un esame puntuale ai figli Giordano e Vincenzo. In una lettera a Rampinelli del 19 agosto 1745, Giordano (e per sua mano, Jacopo) Riccati "confessano di avere scorse con avidità le dottissime scritture ritrovando per tutto motivi di ammirare l'ingegno grande della Dama, l'esattezza del metodo e la chiarezza della dettatura". Nell'aprile dell'anno successivo Maria Gaetana ha ultimato la redazione delle parti dedicate al calcolo differenziale e all'integrazione delle equazioni differenziale, che vengono inviate per averne un giudizio a Giordano Riccati, il quale nella pronta risposta assicura che suo padre Jacopo e egli stesso concordano nel ritenere "le scritture d'Algebra Cartesiana" dell'Agnesi (ossia quello che sarà il primo volume delle *Instituzioni*) "esser esse degne degnissime della pubblica luce, trovandovisi da per tutto e verita, e metodo, e chiarezza ammirabile". (In realtà, tanto degne di pubblica luce non dovevano essere, se ancora il 3 gennaio 1747 Maria Gaetana lo informava che "a norma delle dottissime annotazioni di V. S. illustrissima ho procurato di riformare le scritture d'Algebra Cartesiana"). Quanto al calcolo integrale Jacopo Riccati si riservava di "estendere alcune avvertenze che giudica necessarie", mentre sulle sezioni dedicate al calcolo differenziale Vincenzo Riccati "pensandovi sopra ha trovato la facenda piu imbrogliata di quello a principio pensava". Nell'ottobre 1746 Agnesi ringraziava Jacopo Riccati per "le dottissime annotazioni veramente degne dell'alto suo sapere e dottrina" alle sue pagine sul calcolo integrale.

In tutti quei mesi Maria Gaetana era stata completamente assorbita dallo studio e dalla scrittura. "Immersa in così profonde speculazioni – scrive Pietro Verri – ritrovava spesse volte ne' sogni la soluzione de' problemi più ardui, e l'invenzione de' metodi più semplici e eleganti". Anche Frisi ricorda che non di rado capitò che "pensando ella pure in sogno ad un punto matematico, da essa previamente meditato e lungamente discusso, balzò dormendo dal letto in semplice camiscia, passò le anticamere, andò nel suo studio, annotò la soluzione, poi ritornò al letto e svegliata la mattina rimessasi al suo tavolino, trovò ivi l'annota-

zione già stesa, che pria credeva soltanto nella sua mente concepita". Mentre la stampa è già in corso – da oltre un anno lo stampatore Richini si è insediato coi suoi torchi in casa Agnesi per consentire a Maria Gaetana di seguire da vicino il lavoro e verificare la correttezza di simboli e formule – finalmente nel maggio 1748 Maria Gaetana riceve quelle che Jacopo Riccati con eccessiva modestia chiama le "mie insulse annotazioni sopra i dottissimi scritti della Sig.ra Contessa mia riveritissima Padrona", ma che in realtà sono una chiarificazione dei concetti basilari del calcolo differenziale (egli dichiara di essersi "esteso alquanto sulla natura e sull'uso delle prime ed ulteriori differenze, onde il lettore potesse formarsene una distinta e sincera idea"). Nel frattempo la notizia delle sue grandi qualità si era diffusa tra gli studiosi, e il 20 giugno 1748 Francesco Maria Zanotti, segretario dell'Istituto di Bologna la propone come associata di quell'Accademia. "Io non ho mai adempiuto né meglio né più volentieri, né procurato maggiormente l'onore e la gloria di questa nostra Accademia delle Scienze – dirà in seguito Zanotti – che quando proposi la chiarissima signora Maria Agnesi per esser aggregata alla medesima". Nell'agosto di quello stesso anno Agnesi può ringraziare Jacopo Riccati per "l'ultima parte delle mie Istituzioni illustrata dalle dottissime annotazioni di V.S. Ill.ma degne certamente della di Lei gran mente". Con la tacita approvazione dei Riccati, padre e figli, la stampa delle *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana* può finalmente concludersi (*Fig. 2*).


INSTITUZIONI
ANALITICHE
AD USO
DELLA GIOVENTU' ITALIANA
DI D.NA MARIA GAETANA
AGNESI
MILANESE
Dell' Accademia delle Scienze di Bologna.
TOMO I.
IN MILANO, MDCCXLVIII.
NELLA REGIA-DUCAL CORTE.
CON LICENZA DE' SUPERIORI.

Fig. 2.

LE *INSTITUZIONI ANALITICHE*

"Non avvi alcuno, il quale informato essendo delle Matematiche cose, non sappia altresì quanto, in oggi spezialmente, sia necessario lo studio delle Analisi, e quali progressi si sieno fatti, si facciano tuttora, o possano sperarsi nell'avvenire", è l'esordio programmatico che Maria Gaetana rivolge al lettore. Ma tanto grande è la necessità di quello studio per la gioventù, altrettanto grandi sono le difficoltà che un principiante incontra nel "ridurre a metodo le materie". Certo, l'ha fatto a suo tempo Charles Reyneau con la sua *De l'analyse demontrée* (1708) che Agnesi ritiene "opera degna di tutte quelle lodi, che maggiori si possono". (Tuttavia, "if we may judge by the opinions other mathematicians held of that book," ha scritto Truesdell,"in addition to her usual determination and industry she must have had a strong stomach".) Comunque sia, i "nuovi ritrovamenti" della scienza, e i "metodi di recente invenzione" giustificano la necessità di nuove Istituzioni, e Agnesi rivendica a sé il merito di aver esposto gli argomenti "con la dovuta chiarezza, e semplicità, omettendo tutto il superfluo" senza trascurare nulla di utile o necessario. Avendo poi cominciato la redazione in italiano "per mio particular divertimento", o per l'istruzione dei fratelli minori, sull'esempio di "tanti celebri matematici Oltremontani" aveva deciso di mantenere la propria lingua, per evitare "la fatica materiale" di tradurre l'opera in latino.

Il primo tomo delle *Instituzioni* è dedicato all'analisi delle quantità finite, alla soluzione delle equazioni algebriche e allo studio delle coniche e delle curve di ordine superiore al secondo, come la versiera, la curva cui è rimasto legato il suo nome (*Fig. 3*).

La versiera, una curva già studiata da Fermat e da Guido Grandi, è infatti una cubica piana che nella notazione oggi familiare (scambiando la x e la y rispetto all'uso dell'Agnesi) ha equazione cartesiana $(a^2 + x^2)y = a^3$. Come si vede, Agnesi determina la sua equazione con una proporzione. La curva è simmetrica rispetto all'asse y e nel semipiano positivo delle x (e simmetricamente nel semipiano negativo) presenta un flesso "il quale si troverà col metodo da darsi a suo luogo", ossia nel secondo volume delle *Instituzioni*, dedicato al calcolo differenziale, al calcolo integrale e al "metodo inverso delle tangenti", ossia l'integrazione delle equazioni differenziali che Agnesi presenta con una raccolta sistematica di casi e di esempi.

PROBLEMA III.

238. *Dato il ſemicircolo* ADC (Fig. 135.) *del diametro* AC; *ſi ricerca fuori di eſſo il punto* M *tale, che condotta* MB *normale al diametro* AC, *che taglierà il circolo in* D, *ſia* AB, BD :: AC *alla* BM, *e perchè infiniti ſono i punti* M, *che ſoddisfanno al problema, ſe ne dimanda il luogo.*

Sia M uno di queſti punti, e chiamata $AC=a$, $AB=x$, $BM=y$, ſarà, per la proprietà del circolo, $BD=\sqrt{ax-xx}$, e per la condizione del problema, ſarà $AB, BD :: AC, BM$, cioè $x, \sqrt{ax-xx} :: a, y$; e però $y=\frac{a\sqrt{ax-xx}}{x}$, o ſia $y=\frac{a\sqrt{a-x}}{\sqrt{x}}$, equazione alla curva da deſcriverſi, che diceſi la *Verſiera*.

Fig. 135.

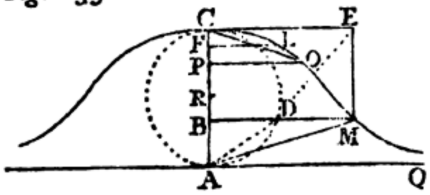


Fig. 3.

L'opera viene accolta con universale apprezzamento nel mondo scientifico e accademico. Dice Frisi che "tutti i fogli Letterari d'Italia, e molti altri fuori di essa emularonsi prestantemente nell'annunziarla, e nel darne diligentissimi estratti". Valga per tutti l'entusiastica recensione riservata dagli *Acta eruditorum*: l'Agnesi è "donna di eccezionale cultura", "unica ad esser mai arrivata a un così elevato livello di conoscenza scientifica e di dottrina", la sua opera è "egregiamente utilizzabile dagli studiosi di Analisi", e ancora "si possono ritrovare, specialmente nell'Analisi degli infiniti, tali approfondimenti che non si possono rintracciare in nessun altro testo d'Analisi". Si tratta di un'esposizione sistematica "dell'intera analisi di Cartesio e di quasi tutte le scoperte fatte fino ad oggi nel calcolo differenziale e integrale", si legge in un elogiativo rapporto dell'Académie des sciences di Parigi del 6 dicembre 1749 che coglie in effetti il pregio e l'originalità di quel trattato. "Non si sono ancora viste in nessuna lingua delle Istituzioni d'analisi che pos-

sano condurre altrettanto velocemente e altrettanto lontano coloro che vorranno penetrare nelle scienze analitiche", continuano gli accademici parigini. In conclusione, "lo consideriamo il trattato più completo e meglio fatto che ci sia in questo genere" di opere. Da parte sua, il segretario dell'Académie le scrive di aver "addirittura saputo che se le Leggi istitutive dell'Accademia avessero permesso ammettere delle dame, sarebbe stato per m.lle Agnesi un sicuro trionfo". Il 28 giugno 1749 Vincenzo Riccati ringrazia Maria Gaetana per l'invio delle *Instituzioni* scrivendole di avere "nei due tomi trovate raccolte con precisione di metodo, e con profondità e chiarezza di dottrina, le più importanti e utili scoperte che in materia di analisi sì cartesiana come leibniziana si siano sino ai giorni nostri fatte collo studio de' più ingegnosi geometri". Ma in fondo egli ne aveva seguito da vicino la redazione.

Non mancarono i ringraziamenti da parte di nobili e principi cui l'opera era stata inviata, a cominciare dalla "Sacra Cesarea Reale Maestà dell'Imperatrice" Maria Teresa d'Austria cui le *Instituzioni* erano dedicate, che le fece avere il suo "clementissimo gradimento" accompagnato da un anello di brillanti in un cofanetto di cristallo di rocca ornato di pietre preziose. Non fu da meno Papa Benedetto XIV. Non digiuno di matematica, il 21 giugno 1749 le scriveva da Castelgandolfo: "Lo studio dell'Analisi fu da noi intrapreso nel primo fiore della nostra gioventù ma fu poi affatto abbandonato, essendoci consecrati a quegli studi propri di quello Stato a cui la Divina Providenza ci aveva prescelto. Sappiamo dunque dell'Analisi quanto basta per essere informati dell'importanza, e per essere ben persuasi della gloria della nostra Italia, quando si ritrova in essa chi ne sia Professore. [...] Ella è senza dubbio nel numero de' primi professori dell'Analisi e la Sua Opera sarà molto utile e contribuirà alla reputazione letteraria dell'Italia e della nostra Accademia delle Scienze di Bologna". Non solo. Poco più di un anno dopo, con un *Motu proprio* il 26 settembre 1750 il Papa la nomina Lettrice onoraria dell'Università di Bologna: "Il pensiere, che ci siamo presi [è] che a lei sia conferita la Cattedra consaputa di Matematica, il che porta seco, ch'ella non deve ringraziar Noi, ma che Noi dobbiamo ringraziar lei, il che facciamo dandole ancora l'Apostolica Benedizione", accompagnata da una corona di pietre preziose legate tra loro in oro e una medaglia d'oro. Pochi giorni dopo, il 5 ottobre, una pergamena del Senato dell'Università di Bologna sancisce la sua nomina. Ma Maria Gaetana ormai rifugge da mondanità, incarichi accademici e

gloria letteraria. Nonostante gli inviti di accademici e ammiratori bolognesi, non accettò di ricoprire quel prestigioso incarico di insegnamento, e non mise mai piede a Bologna. (In verità nemmeno il padre vi aveva mai insegnato, e non era nemmeno un matematico, a dispetto di quanto si continua a leggere, per es. in Wikipedia, *ad vocem*.) La sua fama trovò eco anche nelle rime profane de *Il medico olandese* di Goldoni, messo in scena nel 1756: *Stupitevi piuttosto che con saper profondo// prodotto abbia una donna un sì gran libro al mondo//È italiana l'autrice, signor, non è olandese// donna illustre, sapiente, che onora il suo paese.* Ma a quell'epoca Agnesi aveva completamente abbandonato la vita mondana.

Pia nobildonna

Da tempo Maria Gaetana (*Fig. 4*) era impegnata in attività caritatevoli, assistendo i bisognosi e gli infermi presso l'Ospedale Maggiore, (la Ca' Granda) non esitando, all'occorrenza, ad accoglierli nella propria casa, dove si era fatta assegnare dal padre "alcune rimote stanze" per ospitarli. Nel 1752 quando (finalmente! verrebbe da dire) muore il padre che aveva condizionato al proprio volere tutta l'esistenza della figlia, Maria Gaetana può affermare che è "tolto di mezzo ogni impedimento" per dedicarsi interamente a opere di religione. La matematica, coltivata per amore del prossimo e volontà paterna, è abbandonata senza rimpianti: "Finora spero che il mio studio sia stato di gloria a Dio, perché giovevole al prossimo ed unito all'obbedienza, essendo tale anche la volontà e genio di mio Padre: ora cessando questa, trovo mezzi e modi migliori per servire a Dio e giovare al prossimo e a questi voglio appigliarmi". Nel 1768 viene nominata Priora della Dottrina Cristiana nella parrocchia di San Calimero, vicino al palazzo di casa, e in tale veste guida i volontari della Compagnia Operaia Catechistica, che insegnano il catechismo al "popolo minuto". Dal 1771 è Visitatrice e Direttrice delle donne nel Pio Albergo, allora istituito nel suo palazzo dal principe Antonio Tolomeo Trivulzio per ospitare un centinaio di poveri e infermi. Nel 1883, lascia la casa paterna, dove aveva vissuto insieme ai 13 fratelli e sorelle sopravvissuti, per trasferirsi nel Pio Albergo Trivulzio, dove muore il 9 gennaio 1799 lasciando tra le sue carte manoscritti apologetici e libri di orazioni.



Fig. 4. Busto di Maria Gaetana Agnesi (1881), opera di Giuseppe Franchi, professore di scultura a Brera

"Sottrattasi nella solitudine alla indifferenza de' Cittadini, e consolatasi con le opere di pietà per non aver trovata altra ricompensa ai voli del sublime suo ingegno fuori, che la fama presso gli esteri", afferma nel 1787 un profetico Pietro Verri nell'*Elogio dell'Ab. Frisi.* Nella sua *Histoire des mathématiques* apparse nel 1799, anno della sua morte, di lei scrive infatti J.-É. Montucla: "Devo citare con elogio le Instituzioni analitiche di m.lle Maria Gaetana Agnesi, opera che qualche matematica francese (giacché ce ne sono anche da noi) avrebbe dovuto tradurre nella nostra lingua", apparentemente dimentico del *Traités élémentaires de calcul différentiel et de calcul intégral traduits de l'Italien de m.lle Agnesi,* traduzione del secondo tomo delle *Instituzioni*, apparso a Parigi nel 1775 a cura di Charles Bossut. "Non senza stupore – continua Montucla – si vede una persona d'un sesso così poco adatto a sfidare le spine delle scienze (*d'un sexe si peu fait pour braver les épines des sciences*), penetrare così profondamente in tutte le parti dell'analisi, sia ordinaria che trascendente. Senza biasimare le ragioni apparentemente sublimi che hanno portato m.lle Agnesi a seppellirsi nel ritiro di un convento, si deve rimpiangere che abbia in questo modo privato il mondo della scienza dei lumi che avrebbe potuto ancora diffondervi, non solo per le sue conoscenze matematiche, ma anche per le numerose altre che ella riuniva in sé".

Due anni più tardi compare la traduzione inglese (*Analytical Institutions*, 1801) in cui l'Agnesi è presentata come "Professor of the Mathematiks and Philosophy in the University of Bologna". Ma per

una sorta di diabolico contrappasso, la pia donna che ha dedicato gran parte della sua vita a religione e opere di bene, nei paesi di lingua anglosassone ha il suo nome legato a frequentazioni col demonio. Infatti, il reverendo John Colson, che insegnava matematica a Cambridge dalla cattedra che era stata di Newton, traducendo in inglese le *Istituzioni analitiche* nel 1801 ha attribuito alla *versiera* studiata da Maria Gaetana il nome di *witch*, strega, erroneamente interpretando quel termine come *avversiera* (o *avversaria*) di Dio. Ripresa nel manuale scolastico *Integral calculus* 7 (1875) di B. Williamson, tale ancor oggi è rimasta nella letteratura, *Agnesi's witch*.

BIBLIOGRAFIA

A.F. Frisi, *Elogio storico di D.a Maria Gaetana Agnesi,* Milano 1799 (repr. Milano 1965).

A. Masotti, Maria Gaetana Agnesi, *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano,* 14, 1940.

_____, Matematica e matematici nella storia di Milano, *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano* 39, 1963.

L'epistolario di Jacopo, Vincenzo e Giordano Riccati con Ramiro Rampinelli e Maria Gaetana Agnesi, a cura di S. Mazzone e C.S, Roero. Firenze 2010 https://bibdig.museogalileo.it/Teca/Viewer?an=000000990843

M. Mazzotti, *The World of Maria Gaetana Agnesi, Mathematician of God,* Baltimore, 2007.

M.L. Soppelsa, Jacopo Riccati – Maria Gaetana Agnesi: carteggio 1745-1751, *Annali Ist. Museo Storia Scienza Firenze* 10 (1985) 117-159.

G. Tilche, *Maria Gaetana Agnesi: la scienziata santa del Settecento,* Milano, 1984.

A.C. Truesdell, Maria Gaetana Agnesi, *Archive Hist. Ex. Sci*. 40 (1989), 113-142.

P. Verri, *Memorie appartenenti alla vita ed agli studj del signor don Paolo Frisi.*

Scienze naturali
Geologia

Istituto Lombardo (Rend. Scienze) 152, 201-214 (2018)

ADVANCED DIFFERENTIAL INTERFEROMETRIC SAR TECHNIQUE A-DINSAR FOR THE STUDY OF LARGE LANDSLIDES

CLAUDIA MEISINA (*)

Nota presentata dal m.e. Cesare Perotti
(Adunanza del 22 gennaio 2015)#

SUNTO. – Le grandi frane sono diffuse sia nelle Alpi che nell'Appennino; i movimenti osservati sono generalmente da estremamente lenti a lenti con qualche accelerazione occasionale; il crollo improvviso e parossistico di tutta la massa può avere conseguenze catastrofiche. Risulta difficile individuare correttamente i loro limiti e monitorare il loro stato di attività con strumenti tradizionali. La tecnica dell'interferometria SAR (Synthetic Aperture Radar) differenziale avanzata, A-DInSAR, è una tecnica di telerilevamento, basata su immagini radar satellitari per la misurazione del movimento del suolo. Si basa su immagini multitemporali SAR e consente la misura di spostamenti del terreno con una precisione millimetrica. Lo scopo di questo studio è applicare la tecnica A-DInSAR in alcune grandi frane nelle Alpi (Brenvetto, Rosone e Alpe Baranca) al fine di studiare l'efficacia della tecnica A-DInSAR nel loro studio e monitoraggio.

***

ABSTRACT. – Large landslides are widespread both in the Alps and in Apennines; the observed movements are generally from extremely slow to slow with some occasional acceleration; the sudden and paroxysmal collapse of the whole mass may have catastrophic consequences. They are also difficult to characterize in their boundaries and state of activity and to monitor with traditional tools. The Advanced Differential interferometric SAR (Synthetic Aperture Radar) technique, A-DInSAR, is a remote sensing technique, which is based on satellite radar imagery for the ground motion measurement. It is based on large stacks of SAR images and enables the measure of small displacement of the

(*) Department of Earth and Environmental Sciences, University of Pavia, Italy. E-mail: claudia.meisina@unipv.it

Nota pervenuta il 1 luglio 2018.

ground with a millimetThe aim of this study is to apply the A-DInSAR technique in some large landslide in Alps (Brenvetto, Rosone and Alpe Baranca landslides) in order to study the effectiveness of the technique in their study and monitoring.

1. Introduction

The Vajont landslide event is considered the most disastrous rockslide ever to occur in European territory. It is one of the most examples of a natural disaster induced by human activity and it represents an important case history for scientists and researchers dealing with large rockslides and/or reservoir-induced slope failures.

Large landslides are widespread both in the Alps and in Apennines (Mortara & Sorzana, 1987; Forlati *et alii*, 2001; Ambrosi & Crosta, 2006); the observed movements are generally from extremely slow to slow (Cruden & Varnes, 1996); they are quite regular with some occasional acceleration. Rapid and superficial phenomena are often associated and they result in significant direct and indirect damage. The sudden and paroxysmal collapse of the whole mass may have catastrophic consequences. They are also difficult to characterize in their boundaries and state of activity, to monitor with traditional tools due to their extension (landslides over 0.2 km^2) and low rates of movement, which are close to the detection limit of traditional monitoring equipment (Notti *et alii*, 2013).

The Advanced Differential interferometric SAR (Synthetic Aperture Radar) technique, A-DInSAR, is a remote sensing technique, which is based on satellite radar imagery for the ground motion measurement. It is based on large stacks of SAR images and enables the measure of small displacement of the ground with a millimetric accuracy. This technique can be applied to large landslide study and monitoring due to:

1. The cost-effectiveness of the technique for wide-area applications (hundreds and thousands of km^2);
2. The high density of benchmarks (buildings, rock outcrops, etc..) (up to several hundred per km^2);
3. The use of "natural" benchmarks not requiring deployment and maintenance;
4. The possibility of geo-locating the benchmarks with a precision in the order of 1-5 meters;

5. The availability of the extremely valuable SAR images archive spanning about 30 years, which enables to carry out retrospective studies;
6. Regular revisiting time in the order of 20– 40 days (up to 6 days with the new Sentinel-1 ESA mission).

In the last 20 years A-DInSAR techniques have undergone a strong development; Persistent Scatterer Interferometry (PSI) methods (e.g. PSInSAR™ Ferretti *et alii*, 2001), SqueeSAR™ (Ferretti *et alii*, 2011), small baseline subset - SBAS (Berardino *et alii*, 2002), SPN (Arnaud *et alii*, 2003), and coherent pixel techniques - CPT (Blanco-Sànchez, 2008), PSP-DIFSAR (Persistent Scatterers Pairs - Differential InSAR; (Costantini *et alii*, 2000), allowed to help the detection and monitoring of the very slow and extremely slow movements typical of many large landslides (Colesanti & Wasowski, 2006; Farina *et alii*, 2006; Meisina *et alii*, 2006; Herrera *et alii*, 2009; Guzzetti *et alii*, 2009; Lauknes *et alii*, 2010; Yin *et alii*, 2010).

The aim of this study is to analyze the large landslide kinematics through specific case histories in Alps (Brenvetto, Rosone and Alpe Baranca landslides) with particular focus on spatial and temporal analysis of the movement.

2. Brenvetto Landslide

The landslide of Brenvetto is located in Soana stream basin at the east boundary of Gran Paradiso massif. The landslide is geologically located in the Pennine Nappe, between Sesia-Lanzo zone and Gran Paradiso internal massif (*Fig. 1*). It is characterized by calc-schist and serpentine formation bedrock. The area is covered also by moraine quaternary deposits (Carraro *et alii*, 1995). The main element at risk is the road that connects the high Soana Valley with Orco valley and then the Torino plain.

The upper sector of the slope is affected by large DSGSD (Deep Seated Gravitational Slope Deformation) that does not show any particular evidence of movement except in the central part of the deformation, where a complex landslide was detected (*Fig. 2*). The complex landslide shows clear evidences of movement like trenches, scarps, a strongly fractured rock-mass and many debris flows derived from rock fall and rock mass disaggregation.

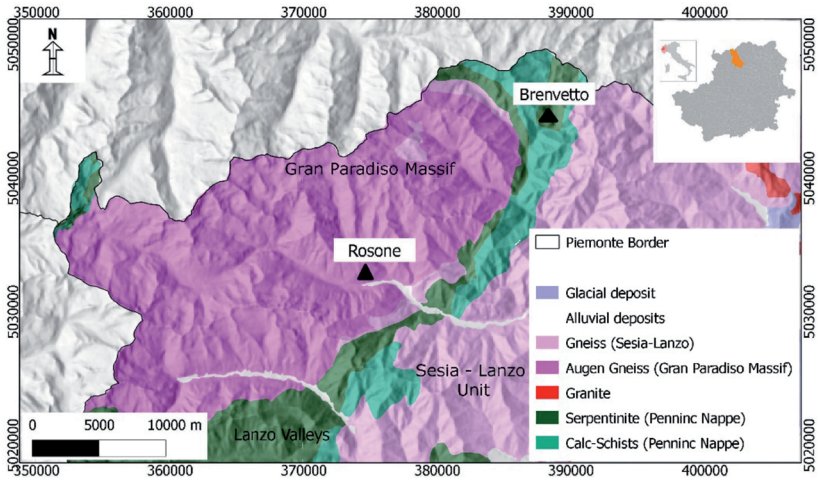


Fig. 1. Geological settings of Rosone and Brenvetto landslides.

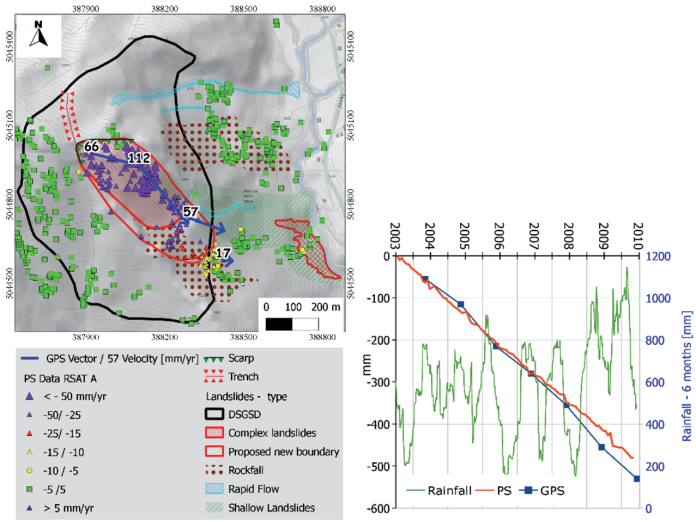


Fig. 2. Brenvetto Landslides. GPS data (2004-2011) and SqueeSAR data (2003-2009). In the graphic PS (RADARSAT ascending data) and GPS time series compared with 6 months cumulated rainfall.

In the lower sector of the slope widespread shallow landslides, debris flows can be noticed and at the toe of the slope erosion of Soana

stream contributes to the general instability (*Fig. 2*). The landslide is monitored by ARPA Piemonte with 5 GPS at manual reading since 2004. The measurements made once at year showed a rate of movement that is up to 110 mm/yr in the central sector of the complex landslide. The SqueeSAR™ data derived from RADARSAT (2003-2009) ascending geometry show a very good numbers (>20) and spatial distribution of targets PS/DS (Persistent Scatterer and Distributed Scatterer) on complex landslide. The rate and the spatial distribution of movement registered by PS/DS is almost the same of GPS measurements (*Fig. 2*).

The direction of the movement (from ESE to SE) is quite parallel with LOS ascending direction and about the 80% of the movement can be detected. It is not possible to resolve the north/south component of the movement due to the few descending data available. The PS/DS data suggested potential enlargement of the complex landslide boundaries to include also some downslope sectors and to update the state of activity: now the landslide is classified as active. The time series of PS and GPS (*Fig. 2*) data show a linear and constant trend of deformation that seems not influenced by rainfall or snow melting. However a small acceleration of the movement was detected by GPS, and also by some PS in 2008/2009. This can be related to the rainy period started in May 2008. Due to the high velocity registered it is possible that some errors related to phase unwrapping (movement greater than $\lambda/4$ between two consecutive acquisitions) should be occurred.

3. Rosone Landslides

The Rosone landslide is located in the NW Italian Alps in the Orco Valley and it is classified as DSGSD.

The landslide affects the penstock of the near hydroelectric central and in case of collapse may create a dam in the Orco river and an interruption of the road that connects the upper part of the valley with the plain. For these reasons the landslide was well studied by many authors (Forlati *et alii*, 2001; Pisani, 2010; Ramasco *et alii*, 1989) that provide to asses the geomorphological, hydrogeological and mechanical settings and they try to model the possible evolution.

The Orco Valley is located in the central part of the Gran Paradiso Massif. This complex belongs to the Upper Pennine Units (Pennine Nappe System) and it consists of a composite crystalline base-

ment and a Permo-Liassic cover (*Fig. 1*). Rosone landslide is modelled on the Augen Gneiss Complex. The geological-structural configuration of the studied area is relatively simple: granite and augen gneiss crop out. The rock mass is characterized by several alpine ductile deformation phases. The main schistosity is affected by the periclinal orientation of the massif, which, in this area, displays an aver-age dip direction of about 150°, with 35° dip (Regione Piemonte, 1996). The brittle structural attitude is defined by three main discontinuity systems: a KS system parallel to main schistosity (SR) and two sub-vertical lineaments corresponding to E-W and N-S striking normal fault conjugate system.

The landslide of Rosone is located on a slope affected by large DSGSD but only the sector of Rosone/Bertodasco has high deformation and instability. The western sector of DSGSD (Ronchi village) presents less evidence of deformations and the movement is more related to shallow debris and colluvium instability.

Considering the most active part of the DSGSD, the Bertodasco area, the geomorphological and the structural analysis joined with monitoring data allowed to detect three main sectors with different rock mass evolution and movement (*Fig. 3*).

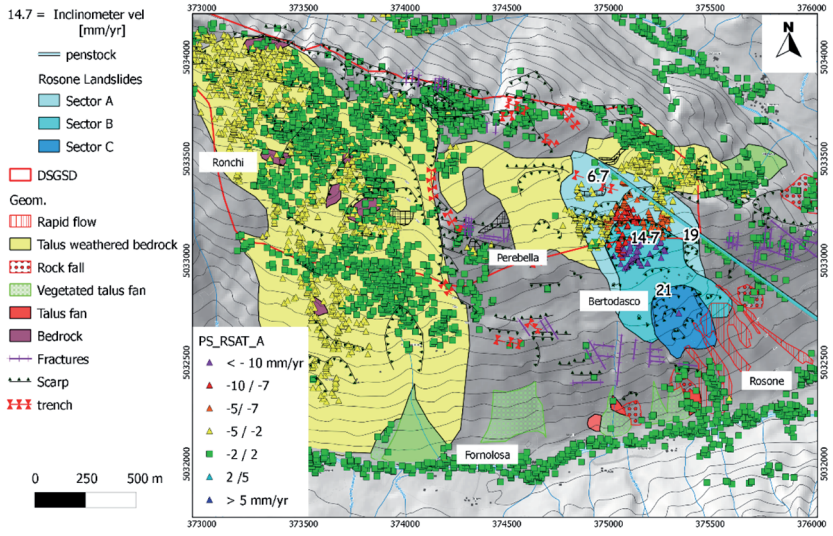


Fig. 3. Rosone geomorphological map and PS data (SqueeSAR, RADARSAT Ascending).

Sector A. It corresponds to the upper part of slope. This is the less weathered rock mass, however many trenches and scarps can be detected. The movement is generally weak and sliding surface is between 30 and 75 m.

Sector B. It is in the central part of deformations. The rock mass is rather weathered with completely disarticulated rock block, scarps and the presence of many debris. The sliding surface can be identified 46 m depth.

Sector C. It is in the bottom part of the slope and it is the most weathered sector, the rock mass is completely disarticulated. The depth of sliding surface is 39 m. This sector is also affected by rock fall and debris flow. In the 1953 a strong reactivation of the movement caused severe damages to Bertodasco village and the inhabitants were evacuated.

The A-DInSAR analysis it is possible only in the sector A and B where a good density of data is available especially with RADARSAT data. The sector C has a wide forest coverage and too fast movement and only 1 PS is present.

– The sector A presents weak movements (5 mm/yr) in the eastern part and moderate movements (up to 10 mm/yr) in the western part that affect the penstock. The movements progressively increase from upslope to downslope.
– The sector B is characterized by moderate movements from 10 to 20 mm/yr. It is possible to see that a scarp borders a sub-sector with major movement.
– The sector C does not have significant PS data due to the vegetation coverage and the high movements that probably cause unwrapping problems. However, the only PS in the sector C recorded a velocity of 25 mm/yr. The GPS and optical measurements show a velocity from 45 up to 130 mm/yr.

The time series of PS RADARSAT data (*Fig. 4*) show a small decrease of the movement in 2005-2007, probably related to a drier period. The movement can be considered as constant and linear. Other monitoring systems show some acceleration after October 2000 flood especially in the sector "C" but no PS data are available for this period.

The ERS data (1992-2001) present a very low density of data especially for ascending geometry, however the few PS on the landslide confirm the same rate of velocity of RADARSAT.

The projection of the velocity of PS data was made on the mean

dip direction schistosity of the rock mass and from the results of GPS measurements. The direction of the movement is between SE and SSE (150°-170°). The ascending geometries can detected about the 60% of real movement.

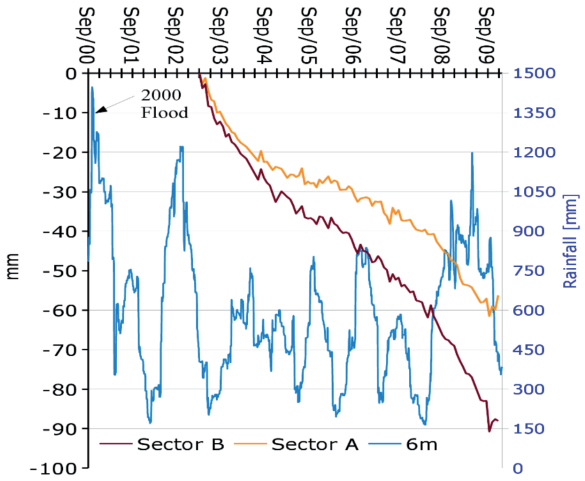


Fig. 4. Rosone Landslide. PS Time series (2003-2009 RADARSAT descending data) of the sectors A and B compared with 6 months (6m) cumulated rainfall (2000-2009).

The combination of ascending and descending geometries allowed to resolve the vertical and E-W component of the movement. The results (up to 6 mm/yr toward East, and 10 mm/yr to down) are in a very good agreement with the other monitoring instruments.

4. Alpe Baranca DSGSD

The Alpe Baranca DSGSD is located in the upper Mastallone stream basin near the village of Fobello. The PS/DS data is the only monitoring system available on this landslide.

Excepted an alpine hut there are no anthropic elements at risk however the landslide is interesting because after October 2000 flood a large fracture appeared in the upper part of the slope as evidence of a great acceleration of the movement of the whole mass.

This area is geologically located inside the Sesia-Lanzo zone, with bedrock of diorite-kinzigite and mica-schist. The main tectonic lineament are oriented SW-NE (*Fig. 5*).

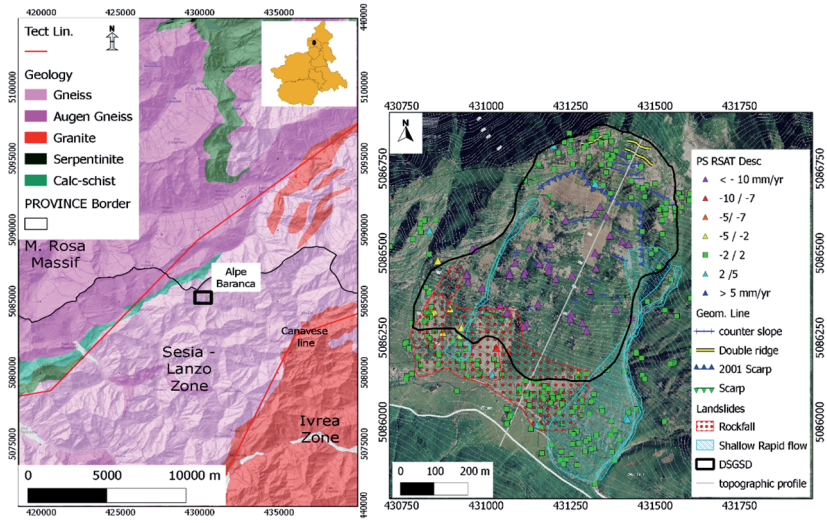


Fig. 5. Alpe Baranca Geological settings and Main Geomorphological elements and RADARSAT descending data.

The DSGSD is located on a slope with SW orientation from 2300 to 1600 m a.s.l.

The deformation presents three main sectors (Maffeo & Zanottelli, 2008):

– The upper sector with a steep slope is characterized by weak weathered bedrock but with great evidence of deformations like double ridge and counter slope, areas affected by rockfall. The PS/DS data do not show any particular movement in this sector.
– The central sector is the area where bedrock is mostly disarticulated with many scarps, counter slope, bulged profiles and many debris deriving from rockfall. After the 2000 flood this entire sector moved of some meters and at the edge of upper sector a large scarp appeared in 2001 spring after snow melting (*Fig. 5*). The scarp shows a displacement up to 6 m in the central part.

The ERS data (1992-2000) (pre-failure) identified a movement from -5 up to -15 mm/yr measured along descending LOS. The

RADARSAT data during the period 2003-2009 (post-failure) measured the same rate of velocity (average Vlos -13 mm/yr). The analysis of time series allowed also to discover a phase unwrapping problems in 2004 caused by a gap of some images. With the correction of this unwrapping problem the average Vlos can be estimated to -20 mm/yr.

Considering an average slope of 34° and a slope orientation of 205° N azimuth the average velocity projected along the slope is about -50 mm/yr for the period 2003-2009.

By combining ascending and descending geometries it was possible to extract East-West and vertical component of the velocity. The vertical component presents greater values than E-W component (up to 10 toward West), the North-South component cannot be calculated but is probably greater than E-W due to SSW slope orientation.

The analysis of time series do not show any particular trend and the movement can be considered linear (*Fig. 6*). It is possible to appreciate however that in the first years of measurements (2003-2005) the velocity had higher values (-25/-27 mm/yr, along LOS) then slowed to -16/-18 mm/yr. This trend is compatible with deceleration after the events of 2000-2001.

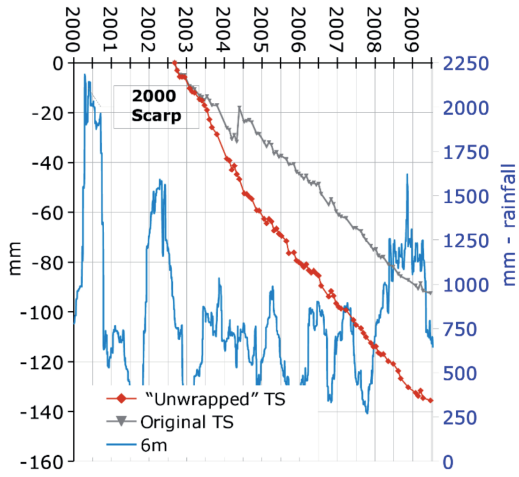


Fig. 6. Alpe Baranca DSGSD: original and "unwrapped" Time series (2003-2009) compared with and 6 months cumulated rainfall (2000-2009). Note the high peak of rainfall occurred in winter 2000-2001.

– The third sector is located at the toe of the slope and it is probably not affected by DSGSD. In this sector we have the presence of talus cone and debris deriving from rockfall. A large fan deriving from rapid flow accumulation is located in the SE sector of the slope. If the velocity and the slope profile are compared a quite good match between geomorphology and velocity detected by SAR data can be appreciated.

5. Conclusions

The analysis of large (>0.2 km^2) slow moving landslides (DSGSD, complex slides, slow flow and roto-traslational slides) with PSI data showed good results, considering the traditional limitations of PSI technique.

The A-DInSAR data were useful to increase the knowledge about landslide kinematics and to integrate information coming from other monitoring systems.

The Brenvetto landslide, in the Soana Valley, is an example of good integration of A-DInSAR and GPS data; both spatial and temporal distributions of the movement (time series) agree and well match the geomorphological evidence.

The Rosone Landslides is one of the most studied landslides in western Alps, due to catastrophic consequence of a collapse that may affect the penstock. In this case the PSI data confirm the already dense and heterogeneous monitoring system network. Due to the benefits in density and for the easiness in data acquisition and storage over large areas, it was decided to integrate and largely replace the old monitoring system with a regular A-DInSAR analysis (every year) in order to follow the evolution of the phenomenon for civil protection purposes.

Generally the monitoring data showed that the DSGSD affecting a slope are generally without movement, while the large landslides, which are related to the main DSGSD, are active and potentially dangerous.

On the opposite for the Alpe Baranca DSGSD the role of A-DInSAR coupled with geomorphological analysis was fundamental because it was the only available monitoring system. ERS (1992-2000) and RADARSAT (2003-2009) data measured a strong acceleration (some meters) after October 2000 flood and a fracture appeared in the

upper part of the slope. PS time series confirm the movement of this sector before and after the paroxysm event but with rate of movement constant and relatively low. This can be an evidence that a good PS coverage allows to detect landslides characterized by extreme slow movement that sometime can have potentially hazardous acceleration when extreme trigger factors occur.

ACKNOWLEDGMENTS

The authors are grate to: TeleRilevamento Europa (TRE) that processed the SAR data; ARPA Piemonte that provides information for local site, SAR and other monitoring system data.

REFERENCES

BERARDINO P., FORNARO G., LANARI R., & SANSOSTI E. (2002). A new algorithm for surface deformation monitoring based on small baseline differential SAR interferograms. IEEE Transactions on geoscience and remote sensing, 40(11), 2375-2383.

BLANCO-SANCHEZ P., MALLORQUÍ J.J., DUQUE S., & MONELLS D. (2008). The coherent pixels technique (CPT): An advanced DInSAR technique for non-linear deformation monitoring. In Earth Sciences and Mathematics (pp. 1167-1193). Birkhäuser Basel.

CARRARO F., FORNO M.G. & BOCCA P.C. (1995). Fenomeni gravitativi nell'alta Val Soana (Torino). Mem. Soc. Geol. It., 50, 45-58.

COLESANTI C & WASOWSKI J. Investigating landslides with space-borne Synthetic Aperture Radar (SAR) interferometry. ENG. GEOL., 88: 173-199.

COSTANTINI M., IODICE A., MAGNAPANE L. & PIETRANERA L. (2000). Monitoring terrain movements by means of sparse SAR differential interferometric measurements. In Proc. IGARSS 2000, Honolulu, USA, pp. 3225-3227.

CRUDEN D.M. & VARNES D.J. (1996). Landslide types and processes in: Landslides, investigation and mitigation, Special Report 247, (ed. A. K. Turner & R. L. Schuster), Transportation Research Board, National Research Council; National Academy Press, Washington, D.C.; pp. 36-75.

FARINA P., COLOMBO D., FUMAGALII A., MARKS, F. & MORETTI S. (2006). Permanent Scatterers for landslide investigations: outcomes from the ESA-SLAM project Engineering Geology, 88 (3-4), pp. 200-217.

FERRETTI A., PRATI C. & ROCCA, F. (2001). Permanent Scatterers in SAR interferometry. IEEE T GEOSCI REMOTE 39(1):8-20.

FERRETTI A., FUMAGALII A., NOVALI F., PRATI C., ROCCA F. & RUCCI, A.

(2011). A New Algorithm for Processing Interferometric Data-Stacks: SqueeSAR. IEEE T GEOSCI REMOTE, vol. 49, no. 9, pp. 3460-3470.

FORLATI F., GIODA G. & SCAVIA C. (2001). Finite element analysis of a deep seated slope deformation. In printing: Rock Mech. and Rock Eng.

FORLATI F., BROVERO M. & CAMPUS S. (1995). Alcune considerazioni sulle deformazioni gravitative profonde di versanti inerenti il territorio piemontese. Atti 2° incontro internazionale dei giovani ricercatori in geologia applicata, Peveragno (Cuneo), 75-81.

GUZZETTI F., MANUNTA M., ARDIZZONE F., PEPE A., CARDINALI M. & ZENI G. (2009). Analysis of ground deformation detected using the SBAS-DInSAR technique in Umbria, Central Italy. Pure and Applied Geophysics, 166, pp. 1425-1459.

HERRERA G., GARCÍA-DAVALILLO J.C., MULAS J., COOKSLEY G., MONSERRAT O. & PANCIOLI V. (2009). Mapping and monitoring geomorphological processes in mountainous areas using PSI data: Central Pyrenees case study. NAT HAZARD EARTH SYS, 9:1587-1598.

LAUKNES T.R., PIYUSH SHANKER A., DEHLS J.F., ZEBKER H.A., HENDERSON I.H.C. & LARSEN Y. (2010). Detailed rockslide mapping in northern Norway with small baseline and persistent scatterer interferometric SAR time series methods. Remote Sensing of Environment, Volume 114, Issue 9, 15 September 2010, Pages 2097-2109, ISSN 0034-4257, 10.1016/j.rse.2010.04.015

MAFFEO & ZANOTELELLI (2008). Movimento franoso dell'Alpe Baranca - Carta Geomorfologica. Municipality of Fobello Internal Report. ARPA Piemonte archive.

MEISINA C., ZUCCA F., FOSSATI D., CERIANI M. & ALIIEVI J. (2006). Ground deformation monitoring by using the Permanent Scatterers Technique: The example of the Oltrepo Pavese (Lombardy, Italy) Engineering Geology, 88 (3-4), pp. 240-259.

MEISINA C., ZUCCA F., NOTTI D., COLOMBO A., CUCCHI A., SAVIO G., GIANNICO C. & BIANCHI M. (2008). Geological interpretation of PSInSAR data at regional scale. Sensors 2008, Volume 8(11), pp. 7469-7492.

MORTARA G. & SORZANA P.F. (1987). Fenomeni di deformazione gravitativa profonda nell'arco alpino occidentale italiano. Considerazioni litostrutturali e morfologiche. Boll. Soc. Geol. It., 106, 303-314.

NOTTI D, MEISINA C., COLOMBO A., LANTERI L. & ZUCCA F. (2013). Studying and monitoring large landslides with persistent scatterer data. Italian Journal of Engineering Geology and Environment – Book Series (6), 349-360, DOI: 10.4408/IJEGE.2013-06.B-33, ISBN 978-88-95814-96-4.

PISANI G., CASTELLI M. & C. SCAVIA C. (2010). Hydrogeological model and hydraulic behaviour of a large landslide in the Italian Western Alps. Nat. Hazards Earth Syst. Sci., 10, 2391-2406.

RAMASCO M., STOPPA T. & SUSELLA G. (1989). La deformazione gravitativa profonda di Rosone in Valle dell'Orco. Bollettino della Società Geologica Italiana, 108(03), 1989, pp. 401-408.

REGIONE PIEMONTE & UNIVERSITÈ J. FOURIER (EDS.) (1966). La frana di

Rosone, Valle Orco – In: Rischi Generati da Grandi Movimenti Franosi, Programme INTERREG I Italy-France: 144-177.

YIN Y., ZHENG W., LIU Y., ZHANG J., & LI X. (2010). Integration of GPS with InSAR to monitoring of the Jiaju landslide in Sichuan, China. Landslides, 7, 359-365.

GIORNATA D'ALEMBERT

Milano, 8 novembre 2018 – Aula delle Adunanze

***

A tre secoli dalla nascita di

JEAN BAPTISTE LE ROND D'ALEMBERT

Istituto Lombardo (Rend. Scienze) 152, 217-246 (2018)

D'ALEMBERT EDITORE E "PHILOSOPHE"

GIANNANTONIO SACCHI LANDRIANI (*)

Sunto. — Nel novembre del 1717 sui gradini della chiesa di Saint Jean-Baptiste de Rond di Parigi fu trovato un neonato al quale fu dato il nome del luogo di ritrovamento e affidato ad una famiglia di artigiani che ne ebbero cura sino ad età adulta. Divenne uomo di grande vigore intellettuale e di notevole prestigio sociale. A dodici anni fu ammesso al Collegio Mazzarino sito in quai Conti nella Coupole, l'edificio che nel 1805 diverrà sede dell'INSTITUT DE FRANCE con le sue cinque accademie. Nel collegio acquisì lo pseudonimo di D'ALEMBERT che mantenne per tutta la vita. Diciottenne acquisì il Baccalaureat. Successivamente, divenuto avvocato, fu attratto dalle discipline scientifiche ed in particolare dalle matematiche in cui esibì eccezionale attitudine. In pochi anni pubblicò quattro opere di Meccanica. Nel 1758 un Traité de Dynamique che può essere considerato un capolavoro della cultura scientifica del XVIII secolo. Aveva pubblicato lavori di tale interesse da essere ammesso ventiquattrenne all'Académie des Sciences, poi nell'Académie Francaise della quale divenne in età matura Segretario Perpetuo. Nel 1751 apparve il primo volume della monumentale ENCYCLOPÉDIE di cui fu coautore con DIDEROT. Alcuni monarchi assoluti d'Europa sono stati mecenati di D'Alembert e di altri come lui Philosophes. Forse molti regnanti non condividevano le idee degli Illuministi, ma erano forzati da un'opinione pubblica che mostrava verso di loro grande rispetto.

* * *

Abstract. — On November 16, 1717 on the steps of Saint Jean-Baptiste le Rond de Paris, a newborn was found, and he was given the name of the discovery place. He was placed with a poor craftsman family until he was an adult. Out of this poor origin grew up a man of strong intellectual force and social distinction. At the age of twelve he was admitted the Mazzarino College, then placed in the La Coupole building, which from 1805 hosts, in quai Conti, the Institute de France together with his five academies. In the Mazzarino College the joung man gave himself the pseudonym of D'Alembert, got the Baccalaureat when he was eighteen, and became attorney at the age of 24. He was attracted from scientific disciplines and in particular from mathematics, in which he showed an exceptional attitude. Very soon he published works of such an interest to be admitted to the Académie des Sciences when he was 24. In few years he published four works of mechanics: (SOLID, FLUID, CELESTIAL). In 1758 he published the TRAITÉ DE DYNAMIQUE which can be considered a landmark of scientific culture of the XVIII century. In 1751 the first volume of the monumental ÉNCYCLOPÉDIE appeared; he was co-editor with DIDEROT. The Kings: LUIGI XV DI FRANCIA, FEDERICO II DI PRUSSIA, CATERINA II DI RUSSIA have been the main sponsors of D'Alembert, together with other "Philosophes". They were absolute monarchs, who maybe did not agree with the ideas of Enlightenment, but were forced by the public opinion to show respect in their regards.

(*) Istituto Lombardo Accademia di Scienze e Lettere, Milano, Italy.
E-mail: giansacchi.landriani@gmail.com

1. Preliminari

Questo scritto non è un saggio di storia e neppure un manuale completo delle opere citate. Si tratta di un elenco di illustrazioni di opere custodite nella biblioteca dell'Istituto Lombardo. Opere che appartengono, in quanto a data di pubblicazione, al XVIII secolo con particolare riferimento al periodo storico oggi chiamato "Illuminismo". Vuole essere anche un fugace sguardo sull'ambiente umano. In particolare abbiamo scelto quale personaggio emblematico e in qualche misura protagonista, Jean-Louis Le Rond, che si diede il "nom de plume" di D'Alembert.

Come sarà chiarito nel seguito D'Alembert è un personaggio dai molteplici interessi scientifici ed umanistici (storia, filosofia, astronomia, sociologia, e politica). Questa molteplicità di interessi, in alcuni dei quali è risultato di grandissima statura intellettuale, è il suo marchio di alto prestigio ed anche il suo limite.

Sfogliando gli antichi libri della nostra biblioteca possiamo essere indotti ad annotare che in sostanza l'Illuminismo è stata una corrente di pensiero umanistica con una intensità di correlazioni fra protagonisti del suo tempo e un fervore di cambiamento del mondo. In sostanza perseguiva il mutamento del carattere dell'uomo lontano dall'attività scientifica, ovvero dalla matematica, dalla meccanica razionale, dalla meccanica celeste, dalla gas dinamica, dall'idrologia. Che tutto questo complesso di discipline configuri un enciclopedico illuminista sarebbe affermazione meritevole di approfondita spiegazione. Si vorrebbe in questa sede almeno assecondare la curiosità del lettore.

Vorrei limitarmi a proporre alcune osservazioni del tutto personali. La lettura di autori scientifici, quali Eulero, D'Alembert e Lagrange, sommi rappresentanti della matematica d'ogni tempo, hanno avuto predecessori importanti, che hanno creato teorie e procedimenti della loro scienza carichi di elucubrazioni dal sofisticato approccio. Gli illuministi citati hanno fatto tesoro degli illustri predecessori, in fondo desiderando sostanzialmente "fare della Matematica" che servisse all'uomo. Il che è nobile proposito ma che a mio avviso non è stato soddisfatto durante il XVIII secolo. Quanto allora elaborato e promesso è stato il seme fecondo per il secolo XIX che produsse accanto alla speculazione teorica, un prezioso patrimonio di possibilità operative.

2. Diciottesimo secolo a Parigi

2.1 Sulla vita di D'Alembert

Nella *Fig. 1*, della ben nota facciata di Notre Dame di Parigi, è rappresentata sulla sinistra una piccola chiesa, distrutta nella metà del '700, cappella battesimale dedicata a Saint Jean-Baptiste Le Rond.



Fig. 1. Notre Dame de Paris.

Nella mattina del 16 novembre 1717 è abbandonato sui gradini d'entrata un neonato che, raccolto pare da un gendarme, viene chiamato "Jean-Baptiste Le Rond" dal luogo del ritrovamento. Si accerta trattarsi del figlio naturale di M.me Tencin[1], ex monaca, scrittrice di modesto talento, dallo sfacciato successo mondano e astuta salonnière.



Fig. 2. Il giovane D'Alembert.

Il padre naturale, risultato essere il Cavalier Louis-Camus generale d'artiglieria Destouches, assicurerà al figlio una rendita "vita natural durante" di *1200 livre annue* (equivalenti a circa € 12000 attuali) e affiderà il piccolo a madame Rousseau, moglie di un vetraio artigiano. La modesta famiglia affidataria godrà sempre delle affettuose attenzioni di D'Alembert.
Il padre naturale si preoccuperà di inscrivere il giovane ad una scuola d'élite di Gesuiti. In *Fig. 2* è ritratto Jean-Baptiste Le Rond, forse ventenne, quando si diede,

[1] Claudine Guerin De Tencin (Grenoble 1682-Paris 1749) smodatamente attratta dal potere, trascurata madre di D'Alembert. Pur cosciente del notevole prestigio acquisito negli anni dal figlio non vorrà mai incontrarlo. Amante ufficiale dello spregiudicato cardinale Guillaume Dubois primo ministro durante la reggenza di Philippe d'Orleans. Una donna bella e scellerata, secondo Diderot, avida di beni materiali e di sfrenate speculazioni. Una vita scandalosa ma dotata di grande abilità nel gestire il personale prestigio con amicizie celebri ed edificanti, come il Cardinal Lambertini (futuro pontefice Benedetto XIV) o come Montesquieu nell'aiuto a superare difficoltà per la pubblicazione di L'ésprit des lois.



Fig. 3. Il Collegio.

come allora s'usava, un «nom de plume». Scelse D'Alembert, che tenne per tutta la vita.

A 12 anni entrerà nel Collegio Mazzarino (detto anche Delle Quattro Nazioni), sito nel palazzo di *quai Conti*, che oggi ospita L'INSTITUT DE FRANCE con le sue cinque accademie, ancora benevolmente indicato con la dizione «sous la coupole».[1] Sarà sito privilegiato di D'Alembert che lo frequenterà assiduamente da scolaro, da studente di filosofia, di diritto e di belle arti. Conseguirà il «baccalauréat» nel 1735 e il titolo di avvocato nel 1738. Si dedicherà in seguito allo studio della medicina e con particolare intensità alla matematica. Diverrà membro de l'*Académie des Sciences* e, successivamente, anche membro de l'*Académie Françoise* (secondo l'espressione dell'epoca). Sarà finalmente nominato *Secrétaire Perpetuel de l'Académie Françoise.*

2.2 Philosophes, Salonnières, Mathématiques

D'Alembert nasce nel secondo decennio del XVIII secolo, durante la REGGENZA D'ORLEANS (1715-1723) [29] che ha luogo tra la fine del regno di Luigi XIV, il re Sole, e l'inizio di quello del tredicenne Luigi XV il cui lungo regno, dal 1723 al 1774, precede la salita al trono di Luigi XVI morto, come noto, durante il Terrore della Rivoluzione nel 1793.

D'Alembert muore nel 1783, quasi alla vigilia della rivoluzione francese. Ha vissuto durante il cosiddetto "ancièn régime", regime caratterizzato dalla monarchia assoluta, dalla presenza dominante di una aristocrazia e di un clero privilegiati. La situazione sociale è pervasa da ansiose correnti di corrotti costumi e da difficoltà economiche e politiche. Vale la pe-

na di ricordare l'insieme complesso e potente di correnti religiose - gesuiti, giansenisti, cattolici, ugonotti - in competizione politica pro e contro la struttura monarchica. Inoltre imperversa lo sfrenato lusso di Versailles che concorre a offuscare una chiara visione di buon governo. Vani i tentativi di arrestare la decadenza.

Tuttavia l'ancièn régime convive con il fiorire di cultura scientifica, umanistica e politica, tanto da indurre Federico Secondo di Prussia, monarca illuminato, a intitolare il XVIII secolo francese "il secolo bello"[27].

Le ragioni di un siffatto lusinghiero attributo sono da ricercarsi nell'evoluzione della borghesia con manifestazioni sapienti delle professioni liberali, dell'editoria e dell'accrescersi di un raffinato e vigoroso artigianato che si affaccia alla nascente industria.

Questo vigore alimenterà la corrente culturale dei *philosophes et mathématiques éclairés*[2]. Molti suoi protagonisti diverranno membri dell'Accademia di Francia, e ricordati più tardi come *les immortels*.

D'Alembert è stato infatti accanito polemista, fisico, matematico, astronomo, filosofo. Non perde occasioni, per esempio nei discours préliminaires di molte sue opere scientifiche, di professare l'ateismo con inconsueto vigore e di dichiararsi seguace di John Locke (1632-1704) ritenendolo padre dell'empirismo moderno e anticipatore dell'Illuminismo.

D'Alembert sarà membro di molte accademie europee: Francia, Inghilterra, Svezia, Prussia, Bologna. La bibliografia che lo riguarda, come autore e come oggetto di studio e ricerca, è vastissima. Le opere che lo resero famoso sono soprattutto quelle di carattere scientifico. In particolare di interpretazione analitica, ovvero di matematica, di fenomenologia meccanica. Si tenga conto che nel corso del XVIII secolo il settore della fisica di maggiore attenzione fu la meccanica nelle sue molteplici specialità.

La figura di D'Alembert merita, non solo nel "secolo bello" ma anche in senso lato nella storia della cultura, ragguardevole rispetto per la poliedrica genialità delle sue opere scientifiche e dei suoi interventi di carattere sociale e politico.

2.3 Delle «Dames Salonnières»

Protagoniste d'alto rango le cui ricche dimore erano frequentate, per sapienti e sofisticati incontri, da uomini eminenti. Vale la pena di ricordare ad esempio Marie Therèse Geoffrin perché di sapiente conversazione e particolarmente aggiornata sugli avvenimenti mondani di quegli anni in

[2] Più tardi in italiano detto "Illuminismo".

cui i temi degli intrattenimenti salottieri potevano produrre conseguenze complesse e difficili per il buon vivere. Si può anche citare M.lle de Lespinasse che, con Voltaire, dovette subire tempi non lunghi ma disonorevoli alla Bastiglia per imprudenze in conversazioni critiche nei riguardi di ambienti sovrani.[3]

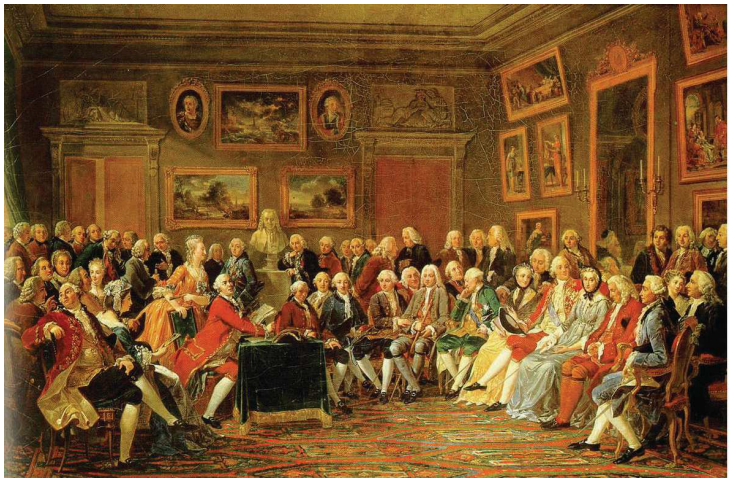


Fig. 4. Lettura dell«Enciclopedia» nel salotto di M.me Geoffrin. Dipinto di G. Lemonnier (Rouen, Musée des beaux arts).

La moda dei "salons" può essere considerata un effimero segno di emancipazione femminile. Effimero rispetto all'affievolirsi che si manifesterà nel secolo successivo.

---

[3] Marie Therèse Geoffrin (Paris 1699-1777) era la nipote della Daufine de France Maria Anna di Baviera, madre di Philippe d'Orleans e nipote del Re Sole. Dimora in rue de Saint Honoré, è allevata da madame de Tencin, madre naturale di D'Alembert. Madame Geoffrin è tradizionalista e abile. Sono molto apprezzate le sue riunioni settimanali del lunedì (con Diderot, Voltaire, D'Alembert. . .). Donna autorevole ha trovato aiuti e protezione in rapporti sociali con personaggi molto influenti: Gustavo Terzo di Svezia, Caterina Seconda di Russia, Maria Teresa d'Asburgo a Vienna con Giuseppe Secondo, e Stanislao di Polonia. Si può ricordare il nome di Julie De Lespinasse per il suo particolare legame con D'Alembert. I saloni furono detti da alcuni frequentatori *laboratoires de l'Enciclopédie.* Fu infatti in una di quelle riunioni che Diderot e D'Alembert si conobbero. Dalla loro concordanza di opinioni nacque l'iniziativa della monumentale opera *L'Encyclopédie.*



Fig. 5. Denis Diderot (1713-1784).

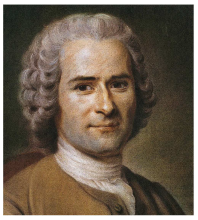


Fig. 6. Jean-Jacques Rousseau (1712-1778).



Fig. 7. Cesare Beccaria (1738-1794).



Fig. 8. François-Marie Arouet Voltaire (1694-1778).

2.4 «Philosophes et Éclairés»

D'Alembert, la cui notorietà è soprattutto legata alla sua grandezza di matematico e fisico, ha coltivato con passione e spregiudicatezza anche problematiche politiche e sociali. Classificarlo *tout-court* «mathématique», è certamente limitativo, ma facilmente divulgativo. Sarebbe ingiusto considerare il suo mondo di interlocutori a personaggi scientifici e non ricordare alcuni philosophes, presumibilmente a lui vicini, sapienti umanisti. Diderot, J.J. Rousseau, C. Beccaria e Voltaire sono rappresentati nelle figure *5*, *6*, *7*, e *8*.

Si tratta di personalità di grande importanza letteraria storica e politica, della compagine dei Philosophes Eclairés, di maggior spicco a quei tempi. I loro nomi sono in generale ben noti e qui si vuole semplicemente annotare la loro inclinazione a stringere un legame amichevole e sapiente con D'Alembert. Il legame con Diderot è marcato dalla collaborazione per dar vita alla definizione e direzione dell'Encyclopédie, con le molte difficoltà implicate nella realizzazione dell'opera. D'Alembert abbandonò dopo alcuni volumi la direzione, ma non la collaborazione con articoli e saggi. I rapporti con Rousseau degli altri sono stati talvolta burrascosi, anche a causa del carattere avventuroso del ginevrino Jean-Jeacques. Ma nessuno ha mai negato le qualità culturali e innovatrici dell'autore de l'*Emile* e della *Julie ou la Nouvelle Héloïse.*

L'italiano Cesare Beccaria è stato considerato dalla cerchia francese un «éclairé» , non ostante la brevità del suo soggiorno parigino. È notevole la circostanza che la presenza d'oltralpe abbia costituito per il milanese un non breve periodo di splendida notorietà. Gli incontri culturali sono stati molteplici e di rilevante sapienza. Il dar vita ad un moltiplicarsi di progetti editoriali stranieri ha concorso a dare anche ai milanesi fratelli Verri – Pietro (1728-1797) e Alessandro (1741-1816), compagni di viag-

gio di Beccaria – una patina di grande splendore e una forte risonanza verso un'apertura illuministica nelle problematiche giuridiche ed economiche. Si ricordino ad esempio l'istituzione in Milano dell'Accademia "Società de' pugni" e la pubblicazione del periodico "Il caffè".[5],[39],[35]. Sfortunatamente gli scambi di lettere tra D'Alembert, Voltaire e altri non hanno lasciato grande testimonianza, in parte anche per l'esigua attività epistolare di Beccaria.

Quanto a Voltaire la sua notorietà internazionale è ancora oggi considerata tra i capisaldi della letteratura di tutti i tempi.

D'Alembert lasciò raramente e per brevissimi periodi Parigi. È significativa la scelta di D'Alembert d'effettuare brevi soggiorni alla dimora di Voltaire a Ferney, villaggio situato al confine tra Francia e Svizzera, per consentire al padrone di casa di cambiare rapidissimamente Stato quando la sua presenza e le sue opere spregiudicate avessero consigliato di raggiungere prontamente una situazione sicura nei confronti delle censure.

3. Le opere di D'Alembert in biblioteca

3.1 Due «Traité» di Meccanica e due «Recherche» di Astronomia [7], [8], [9]

È necessario premettere che tra le opere di D'Alembert della nostra biblioteca non figura la prima edizione (1743) del TRAITÉ DE DYNAMIQUE, ma è tuttavia opportuno segnalarne il valore bibliografico e propedeutico della méchanique. Il contenuto è un preludio, con due "TRAITÉ..." e due "RECHERCHES...", alle pubblicazioni edite sino al 1758. È opportuno seguire un ordine cronologico nella presentazione dei quattro volumi.

Nel 1744 è edito *chez David l'ainé* in Parigi, il "TRAITÉ DE L'EQUILIBRE ET DE MOUVEMENT DES FLUIDES POUR SERVIR DE SUITE AU TRAITÉ DE DYNAMIQUE" dedicato alla idrodinamica e gasdinamica. Si tratta di un'opera di 458 pagine precedute da un "discours preliminaire" di XXXII pagine e da una decina di tavole in 4°. Il frontespizio (vedi *Fig. 9*) decorato con marca accuratamente stampata, reca il timbro "I. R. ISTITUTO DI SCIENZE LETTERE ED ARTI" che indica una data d'acquisizione, da parte del nostro Istituto, risalente ai tempi del REGNO LOMBARDO VENETO. Si tratta di opera catalogata ICCU (OPAC SBN – Istituto Centrale per il catalogo Unico) con il codice identificativo IT\ICCU\UBOE\028615. Nella scheda è indicata una lista di


TRAITÉ
DE L'ÉQUILIBRE
ET DU MOUVEMENT
DES FLUIDES.
Pour servir de suite au Traité de Dynamique.
Par M. D'ALEMBERT, de l'Académie Royale des Sciences.
A PARIS,
Chez David, Libraire, rue Saint Jacques, à la Plume d'or.
M. DCC. XLIV.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.
I.R. ISTITUTO DI SCIENZE LETTERE ED ARTI

Fig. 9. Traité de l'Equilibre et du Mouvement des Fluides, 1744.

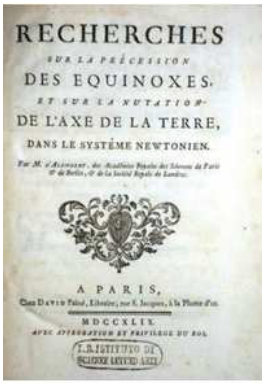

RECHERCHES
SUR LA PRÉCESSION
DES EQUINOXES.
ET SUR LA NUTATION
DE L'AXE DE LA TERRE,
DANS LE SYSTÊME NEWTONIEN.
Par M. D'ALEMBERT, des Académies Royales des Sciences de Paris & de Berlin, & de la Société Royale de Londres.
A PARIS,
Chez David l'aîné, Libraire, rue S. Jacques, à la Plume d'or.
M. DCC. XLIX.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.
I.R. ISTITUTO DI SCIENZE LETTERE ED ARTI

Fig. 10. Recherches Sur la Précession Des Equinoxes, 1749.

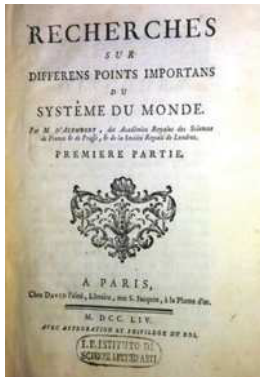

RECHERCHES
SUR
DIFFERENS POINTS IMPORTANS
DU
SYSTÈME DU MONDE.
Par M. D'ALEMBERT, des Académies Royales des Sciences de Paris & de Prusse, & de la Société Royale de Londres.
PREMIERE PARTIE.
A PARIS,
Chez David l'aîné, Libraire, rue S. Jacques, à la Plume d'or.
M. DCC. LIV.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.
I.R. ISTITUTO DI SCIENZE LETTERE ED ARTI

Fig. 11. Recherches sur Differens Points Importans du Système du Monde. Première partie, 1754-56.

17 esemplari conservati in Italia. L'elenco non è da ritenersi completo per gli sconosciuti esemplari appartenenti a collezioni private. Inoltre non sono indicati esemplari collocati in istituzioni straniere. Si tratta però di un indice significativo della diffusione attuale dell'opera.

In *Fig. 10* è rappresentato il frontespizio di "RECHERCHES SUR LA PRÉCESSION DES EQUINOXES, ET SUR LA NUTATION DE L'AXE DE LA TERRE, dans le système newtonien", pubblicato a Parigi nel 1749 ed edito chez David l'ainé, libraire, rue de S. Jacques a la plume d'or *avec l'approbation et privilege du Roi.* Reca una marca floreale xilografica e anche il timbro I.R. ISTITUTO DI SCIENZE, LETTERE ED ARTI. Tratta in particolare delle alterazioni temporali degli equinozi tenendo conto degli spostamenti dell'asse della terra. Si tratta di opera classificata [IT\ICCU\UBOE\028452] e sono dichiarati 16 esemplari.

In *Fig. 11* è rappresentato il frontespizio del trattato di "meccanica celeste" "RECHERCHES SUR DIFFERENS POINTS IMPORTANS DU SYSTÈME DU MONDE. PREMIERE PARTIE" raccolto in tre volumi e pubblicato negli anni 1754-56 *chez David l'ainé, libraire, rue s. Jacques, à la Plume d'Or, Paris.* Non manca la dicitura *Avec Approbation Et Privilege Du Roi*. L'opera, dedicata alla meccanica del sistema solare e in particolare all'equilibrio dei tre corpi Terra Luna e Sole con impostazione newtoniana, è marcata "I. R. Istituto Di Scienze Lettere Ed Arti" a significare l'epoca di acquisizione, e classificata IT\ICCU\RLZE\009813.

L'indicazione n°13 degli esemplari esistenti va assunta con le già indicate cautele. I tre volumi sono articolati in sei libri ai quali è aggiunta una "dissertazione del sistema del mondo" dovuta a CLAIRAUT (Venezia, 1749). È dotata di un DISCOURS PRELIMINAIRE di XXXVIII pagine numerate, 184 pagine e 4 tavole.

In *Fig. 12* è illustrato il frontespizio dell'opera TRAITÉ DE DYNAMIQUE [10], *Dans Lequel Les Loix De L'équilibre & Du Mouvement Des Corps Sont Reduites Au Plus Petit Nombre Possible, & Demontrées D'Une Maniere Nouvelle, & Ou L'On Donne Un Principe Generale Pour Trouver Le Mouvement De Plusieurs Corps Qui Agissent Les Uns Sur Les Autres D'Une Maniere Quelconque*. D'Alembert si propone inoltre una riduzione e unificazione dei problemi della meccanica.

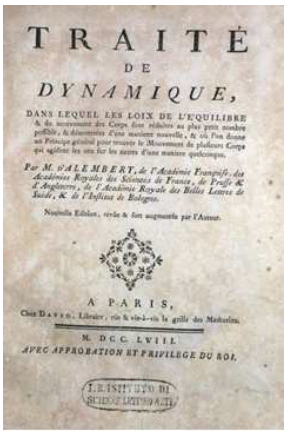

TRAITÉ
DE
DYNAMIQUE,
DANS LEQUEL LES LOIX DE L'EQUILIBRE
& du mouvement des Corps sont réduites au plus petit nombre
possible, & démontrées d'une maniere nouvelle, & où l'on donne
un Principe général pour trouver le Mouvement de plusieurs Corps
qui agissent les uns sur les autres d'une maniere quelconque.
Par M. D'ALEMBERT, de l'Académie Françoise, des
Académies Royales des Sciences de France, de Prusse &
d'Angleterre, de l'Académie Royale des Belles Lettres de
Suede, & de l'Institut de Bologne.
Nouvelle Edition, revûe & fort augmentée par l'Auteur.
A PARIS,
Chez DAVID, Libraire, rue S. vis-à-vis la grille des Mathurins.
M. DCC. LVIII.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.
I.R. ISTITUTO DI SCIENZE LETTERE ED ARTI

Fig. 12. Traité de Dynamique, 1758.

Analizzate le proprietà del movimento di un solido secondo Newton, D'Alembert enuncia il principio della dinamica noto come "Principio di D'Alembert" che è alla base di numerosi trattati successivi. Fornisce le leggi generali del movimento di sistemi di corpi esponendo il principio dei lavori virtuali. Enuncia il teorema generale dell'algebra che verrà dimostrato da GAUSS nel XIX secolo. Affronterà problemi di convergenza di serie numeriche.

Questa seconda edizione (la prima è la citata del 1743), contiene contributi dei trattati editi negli anni 1744, 1749 e 1754. È dichiarata «revue et fort augmentée par l'auteur» ed è pubblicata a Parigi *chez David, Joseph-Denis, libraire, (1758) a l'imprimerie de J. Chardon.* con le indicazioni [12], xl, 272, xiii. di tav. ripieg.: ill. 4. Reca il timbro [I.R. Governo], la classifica [ICCU\PUVE\007109] e la dicitura AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI. Da ICCU sono dichiarati 10 esemplari.

3.2 Un'opera da Secrétaire Perpetuel

In qualità di Secrétaire Perpetuel, D'Alembert è autore de l' HISTOIRE DES MEMBRES DE L'ACADÉMIE FRANÇOISE, *Mortes Depuis 1700 Jousqu'en 1771, Pour Servir De Suite Aux Éloges Imprimés & Lus Dans Les Séances Publiques De Cette Compagnie* [11].

Si tratta di un'opera di 6 volumi contenente prudenti e benevoli elogi detti in assemblea. A questi fanno seguito critiche, spesso molto dure, diffuse con cautela. Non poche sono interessate da querelles théologiques. Alcune sono particolarmente laudative, come ad esempio quella di Montesquieu (1689-1755) (tomo v, pag. 513), dovuta all'atteggiamento éclairé dell'autore del L'ESPRIT DE LA LOI e quella di Marivaux (1688-1763) altissimo protagonista del teatro moderno.


HISTOIRE
DES MEMBRES
DE
L'ACADÉMIE FRANÇOISE,
Morts depuis 1700 jusqu'en 1771,
POUR servir de suite aux ELOGES imprimés & lus dans les Séances publiques de cette COMPAGNIE.
PAR M. D'ALEMBERT, Secrétaire perpétuel de l'Académie Françoise, & Membre des Académies des Sciences de France, d'Angleterre, de Prusse, de Suede, de Portugal, de Bologne, de Turin, de Naples, de Cassel, de Boston, & de Norwege.
TOME DEUXIEME.
A AMSTERDAM;
Et se trouve à Paris,
Chez MOUTARD, Imprimeur-Libraire de la REINE, de MADAME, de Madame Comtesse D'ARTOIS, & de l'Académie des Sciences, rue des Mathurins, Hôtel de Cluni.
M. DCC. LXXXVII.

Fig. 13. Histoire Des Membres De L'Académie Françoise, 1787.

A proposito di Montesquieu vale la pena di riportare Parte dell'elogio a lui dedicato: «*L'interesse suscitato nei buoni cittadini dall'Enciclopedia e il grande numero di uomini di lettere che vi abbiano consacrato i loro lavori, sembra permetterci di considerarla come uno dei monumenti più adatti ad essere depositari dei sentimenti della patria e degli omaggi degli uomini celebri che l'abbiano onorata. Persuasi, peraltro, che il Signore di Montesquieu avrebbe avuto il diritto di attendersi, invece di noi, altri panegiristi, e che il dolore pubblico avrebbe meritato interpreti più eloquenti, abbiamo rinchiuso all'interno di noi stessi i nostri giusti rimpianti e il rispetto per la sua memoria; ma il riconoscimento di ciò che gli dobbiamo è troppo prezioso per lasciare che siano altri a curarsene. Benefattore dell'umanità per mezzo dei suoi scritti, ha accettato di esserlo anche per quest'opera e la nostra riconoscenza non vuole che tracciare alcune linee ai piedi della sua statua.*» Tra le note decisamente negative vale la pena di sottolineare quella per il cardinale Dubois (1656-1723) astuto, ambizioso, privo di scrupoli, tutore del giovane duca di Chartres (poi reggente con il nome Filippo d'Orleans).

L'opera completa è catalogata [ICCU\NAPE\042658] e sono indicati in catalogo 3 esemplari dei quali solo uno sembra essere completo. L'indicazione editoriale è *Chez Moutard, Imprimeur-Libraire De La Reine, De Madame, De Madame Comtesse D'Artois & De L'Académie Des Sciences, Rue De Mathurins, Hotel De Cluni, 1785.* L'esemplare della nostra biblioteca è privo del primo volume. Il frontespizio presentato in *Fig. 13* è relativo al tomo secondo, reca la dicitura "a Amsterdam", il timbro ISTITUTO LOMBARDO DI SCIENZE E LETTERE induce a ritenere che sia stato acquisito dopo il 1945.

3.3 Dell'Enciclopedia [25]

La *Fig. 14* rappresenta il frontespizio della nota opera ENCYCLOPÉDIE OU DICTIONNAIRE RAISONNÉ DES SCIENCES, DES ARTS ET DES MÉTIERS, *par une société de gens de lettres.* Si tratta del primo tomo della prima edizione apparsa a Parigi a cura di D'Alembert e Denis Diderot, catalogata ICCU [IT\ICCU\SBLE\018639] con dichiarazione (certo approssimata per difetto) di 24 esemplari in Italia.


ENCYCLOPEDIE,
OU
DICTIONNAIRE RAISONNÉ
DES SCIENCES,
DES ARTS ET DES MÉTIERS,
PAR UNE SOCIÉTÉ DE GENS DE LETTRES.
TOME PREMIER.
A PARIS,
M. DCC. LI.

Fig. 14. Encyclopédie, 1772.

Vengono elencati quali editori: DE Roy, rue de la Harpe -Durand rue Saint Jacques à Saint Landry et au Griffon. La prima edizione si ferma nel 1752 a causa di censure e difficoltà editoriali. Poco dopo riprende la pubblicazione, ma nel 1758 D'Alembert lascia la direzione pur mantenendo il ruolo di collaboratore scientifico.

L'impresa editoriale de l'Encyclopédie si conclude, dopo molte vicissitudini, nel 1772 con 17 volumi di testo e 11 di tavole a disegno. Il discours préliminaire di D'Alembert è considerato il manifesto politico-filosofico dell'Illuminismo francese.[4]

Di impostazione antireligiosa, secondo i principi dei "philosophes et mathématiques éclairés", è stata opera di enorme successo sin dalla prima edizione, sia in Francia che all'estero. Due ristampe della 1^a edizione sono state realizzate a Lucca e a Livorno, protette inizialmente da Leopoldo II d'Asburgo granduca di Toscana, da madame de Pompadour, favorita del re Louis XV, e da Malesherbes ministro alle stampe reali.

Opera di grande prestigio culturale e di notevole valore bibliografico non aveva lasciato (ai primi lettori) trasparire chiaramente il carattere del manifesto rivoluzionario, quale invece nel lungo periodo della sua lunga edizione divenne accettato.

---

[4] «L'Encyclopédie [25] ha due scopi. In quanto Enciclopedia, deve esporre per quanto possibile l'ordine e la connessione delle conoscenze umane. In quanto Dizionario ragionato delle scienze, delle arti e dei mestieri, deve spiegare i principi generali d'ogni scienza e arte, liberale o meccanica, e i più notevoli particolari che ne costituiscono il corpo e l'essenza». "Dal Discorso Preliminare di Jean le Rond D'Alembert tratto dal primo volume dell'Encyclopédie."

Ebbe autori e sostenitori insigni: Diderot, D'Alembert, Rousseau, Voltaire, Montesquieu, Buffon, H.B.De Saussures . . .

L'Encyclopédie rappresenta un importante punto di arrivo di un lungo percorso teso a creare un compendio universale del sapere, nonché il primo esempio di moderna enciclopedia. Il Discorso Preliminare, è considerato un'importante esposizione degli ideali dell'Illuminismo, in cui viene esplicitato l'intento dell'opera di incidere sul modo di pensare e sulla cultura del tempo.

Nel XVIII secolo costituì il più ponderoso compendio del movimento filosofico e culturale passato alla storia come Illuminismo.

Nel 1728 è pubblicato a Londra, *Cyclopædia, or an Universal Dictionary of Art and Sciences* e la versione francese fu affidata nel 1743 al tipografo reale, il libraio ed editore André Le Breton.

3.4 L'impresa editoriale ed economica [13]

1745. L'editore André Le Breton affida a Denis Diderot la traduzione della *Cyclopædia*, stampata dall'editore inglese Ephraim Chambers nel 1728 epoca in cui le arti e i mestieri manuali erano considerati generalmente di minore importanza. Sotto l'impulso di Diderot e di D'Alembert si delineò un'unica opera organica di tutte le conoscenze del tempo. Il 16 ottobre 1747 il progetto di redazione dell'Encyclopédie viene ufficialmente affidato a Diderot e D'Alembert. Nel novembre 1750 il *Piano dell'opera*, redatto da Diderot è diffuso in 8.000 esemplari.

Nel 1751 è pubblicato il primo volume dell'*Encyclopédie*, con il *Discorso di presentazione* di D'Alembert. I Gesuiti promuovono la proibizione dei tomi primo e secondo. Interviene Madame de Pompadour, e Malheserbes propone di limitare i contributi a materie matematiche.

Novembre 1753: è la pubblicazione del tomo terzo. Novembre 1755: pubblicazione del tomo quinto. 1757: viene affermato che lo scopo reale dell'*Encyclopédie* sarebbe quello di minare il governo assolutista e la religione, promuovendo l'ateismo in forma larvata. 8 marzo 1759: la soppressione del Privilegio Malheserbes permette di limitare le censure e le copie proseguono.

Settembre 1762: un decreto del Parlamento di Francia decreta l'espulsione dei gesuiti. 1765: Diderot conduce a termine il suo lavoro di redazione e di supervisione, che si conclude nel 1778.

Al fine di portare avanti il loro progetto, Diderot e D'Alembert, che sarà condirettore sino al 1759, si circondano di una "società di letterati".

L'*Encyclopédie* è anche un'opera che si propone di «sommuovere tutto, senza eccezioni e senza riguardi» , e per ottenere tale scopo Diderot dovrà lottare contro la censura. I Gesuiti rimproverano alla tesi dell'abate Prades di contenere delle proposizioni eretiche e riescono ad organizzare un autodafé. Madame de Pompadour, favorita di Luigi XV, appoggia Diderot.

All'originale seguirono rapidamente riedizioni, adattamenti e copie non autorizzate. Così, sebbene la prima edizione fosse stata tirata in 4.225 esemplari, se ne contano quasi 24.000 tra tutte le diverse edizioni vendute all'epoca della Rivoluzione francese.

L'opera (per i tempi di enorme portata) occupò circa mille operai nell'arco di 24 anni. Ci furono 2.250 sottoscrittori per una tiratura di 4.250 copie (numero risibile oggi, ma durante il XVIII secolo, una tiratura «normale» non andava oltre i 1.500 esemplari).

In conclusione, l'impresa fu un vero successo editoriale: a fronte di 1.158.000 lire spese, ne furono guadagnate 2.162.000, quasi raddoppiando l'investimento. Tra Lucca (1758 e il 1776) e a Livorno (1770-1778), l'impresa dell'edizione lucchese ottiene l'imprimatur di papa Benedetto XIV e un elogio di Montesquieu. L'edizione di Livorno fu curata dall'Abate Michelangelo Serafini e da Filippo Gonnella, col beneplacito del Granduca Pietro Leopoldo di Toscana.

3.5 Sulle intenzioni "educative" dell'opera

Diventando nobiltà di denaro contrapposta alla nobiltà di spada, i borghesi si sentono frustrati dal fatto che la situazione (cioè la mobilità fra le classi sociali) sia totalmente bloccata. Si impongono nella società nuovi valori: la *natura* che determina il divenire dell'uomo, *il benessere in terra* che diventa uno scopo, il *progresso* per cui tutte le epoche si sforzano di realizzare il massimo benessere collettivo. Il nuovo spirito filosofico che si stabilisce è basato sull'amore per la scienza, la tolleranza ed il benessere materiale, in opposizione ai vincoli derivanti dal regime monarchico e dalla religione che non vanno messi in discussione. Contemporaneamente l'ateismo, che debutta ufficialmente come posizione sociale, viene perseguito dalla legge e può comportare la condanna a morte.

Questo sviluppo si ispira allo spirito scientifico. Il metodo sperimentale, applicato a questioni filosofiche, conduce all'empirismo, per il quale tutta la conoscenza deriva, in via più o meno diretta, dall'esperienza dei sensi, senza intervento dello spirito. Lo spirito scientifico manifesta un suo carattere enciclopedico: nel XVIII secolo non si specializza, ma tocca molti domini della conoscenza, dalla scienza alla filosofia, dall'arte

alla politica e alla religione. Due esempi: 31 libri de *L'Esprit des lois* di Montesquieu, 36 volumi de l'*Histoire naturelle* di Buffon. Il Dizionario filosofico di Voltaire (che conta 614 voci) [34],[41].

Tale forma di pensiero è fondata sui fatti sensibili, l'esperienza e la curiosità per le innovazioni.

Lo spirito critico contro le istituzioni, verso il *deismo* che contempla l'esistenza di un dio senza chiesa. Il risvolto positivo di questa critica è lo spirito riformistico che l'accompagna. Gli enciclopedisti prendono infatti posizione in modo marcato a favore dello sviluppo dell'istruzione, dell'utilità delle belle lettere, della lotta contro l'Inquisizione e la schiavitù, della valorizzazione delle arti "tecniche", per l'uguaglianza dei diritti naturali e per lo sviluppo economico, che viene visto come sorgente di ricchezza e di benessere.

L'abbondanza di note storiche scoraggiava una censura alla ricerca di idee sovversive. Alcuni enciclopedisti preferirono far passare punti di vista iconoclasti all'interno di voci apparentemente inconsistenti.

Gli apporti positivi recati dai LUMI hanno avuto anche un prosaico prezzo. Voltaire, titolare di una delle maggiori fortune del Regno di Francia, fece di sé stesso uno dei primi capitalisti francesi. I valori promossi da questi filosofi, pertanto, erano sovente coincidenti con quelli della classe sociale che li esprimeva e che si avviava a conquistare il potere: la "borghesia". Si valorizzano il lavoro, la ricchezza e l'industria, in opposizione ai valori della nobiltà dedita non al lavoro, ma ai fatti d'arme e caratterizzata dal rifiuto di occuparsi degli affari, della terra e dell'agricoltura.

Per una corretta comprensione dei testi è forse indispensabile sottolineare come gran parte dei filosofi impegnati nell'opera fossero d'estrazione borghese e si rivolgesse a persone dello stesso stato sociale, a dispetto di quanto dichiarato nella voce che chiude l'ultimo volume dell'opera.

Ancora, Voltaire ha spesso manifestato un certo disprezzo verso il "popolino" (d'altra parte scrisse un poema sull'indispensabilità del lusso e al benessere dipingendo la miseria del popolo in termini davvero negativi) e prese spesso in forma metaforica la difesa della minoranza borghese in contrapposizione all'onnipotenza della nobiltà.[5]

[5] La ragione è nei confronti del filosofo ciò che la grazia è nei confronti del cristiano [21] gli altri uomini procedono nelle tenebre; invece il filosofo, anche nelle sue passioni, non agisce che con la riflessione, procede nella notte, ma è preceduto da una fiaccola. [13] I cittadini sono tutti ugualmente nobili, poiché la nobiltà non si ottiene dagli antenati, ma dal diritto comune alle più importanti magistrature. [42] Ma anche nella democrazia più perfetta, l'uguaglianza completa fra i membri è uno stato puramente chimerico.

Si devono a Diderot le considerazioni presenti.
Ciò che caratterizza il filosofo e che lo distingue dal popolano, è che egli non ammette alcunché senza prova, che non ha affatto acquiescenza verso le nozioni fallaci e che stabilisce con esattezza i limiti del certo, del probabile e del dubbio. L'Encyclopédie produrrà certamente, col tempo, una rivoluzione negli animi ed io spero che i tiranni, gli oppressori, i fanatici e gli intolleranti non abbiano a trarne vantaggio. Avremo reso un servigio all'umanità.[6]

Fra i molti collaboratori e sostenitori dell'Enciclopedia possono esserne indicati alcuni di indiscussa notorietà, quali ad esempio: Denis Diderot che ha redatto più di mille voci; D'Alembert ha redatto il *Discours préliminaire* (l'introduzione) e diversi articoli fra cui *Ginevra: sul teatro in questa città.* Barone d'Holbach: chimica, mineralogia, politica, religione. Condillac: filosofia. Montesquieu: parte della voce *Gusto.* Rousseau: musica ed economia politica. Anne Robert Jacques Turgot: economia, etimologia, filosofia, fisica.

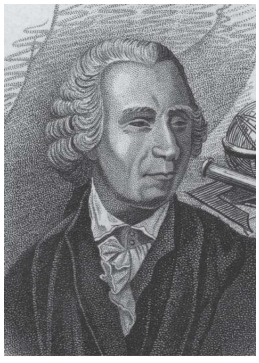


Fig. 15. Leonardo Eulero (1707-1783).

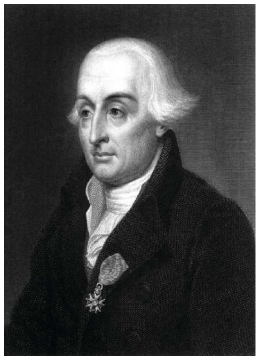


Fig. 16. Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).



Fig. 17. Daniele Bernoulli (1700-1782).

3.6 I matematici contemporanei di D'Alembert

Nelle figure *15*, *16* e *17* appaiono Leonardo Eulero (1707-1783) [16], [17], [18], [19] direttore scientifico dell'Accademia di Berlino, l'italiano

Il miglior governo non è quello che è immortale, ma quello che dura più a lungo e più tranquillamente. Voce Citoyen - Cittadino, Diderot

[6] Lettera di D. a Sophie Volland del 26 settembre 1762.

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)[2],[31],[32],[33] e lo svizzero Daniele Bernoulli (1700-1782).

A Eulero si rivolge DANIELE BERNOULLI (della stirpe di Basilea di matematici d'origine francese) per sottoporre alla sua attenzione il giovane eccellente matematico D'ALEMBERT DELL'ACADÉMIE FRANÇAISE ed in particolare la sua recente opera TRAITÉ DE DYNAMIQUE DEL 1743. Eulero non risponde immediatamente, ma nel frattempo Bernoulli si espone nuovamente dicendo che l'opera da lui citata, dopo una rilettura critica, risulta in realtà meno prestigiosa di quanto sulle prime avesse ritenuto. Afferma di avervi rinvenuto citazioni anonime e banali del suo precedente volume dal titolo IDRAULICA. Non sembra che Eulero abbia reagito e che per un lungo tempo la situazione non abbia avuto seguito.

Dopo un paio d'anni l'Accademia di Berlino apre un concorso di matematica al quale si presentano Bernoulli e D'Alembert. Sotto l'influenza di Eulero il risultato vede vincitore D'Alembert. La situazione si infiamma al punto di influenzare persino le sedute dell'Académie Française.

Nel 1766 Eulero lascia Berlino per accedere all'Accademia della Scienze di Pietroburgo. Alla sua partenza suggerisce a Federico Secondo di Prussia di accogliere, quale suo successore alla direzione dell'Accademia delle Scienze di Prussia, Louis Lagrange, giovane insegnante di matematica alla scuola di artiglieria di Torino. Lagrange accetta la proposta di Federico II e resterà a Berlino vent'anni, per poi recarsi a Parigi ad assumere molti incarichi prestigiosi a cominciare dall'Accademia francese. Sopravviverà a diverse vicende politiche, dalla rivoluzione alla epopea napoleonica. Morirà a Parigi nel 1813 e verrà sepolto al Pantheon colmo di onori.

I tre personaggi citati: Eulero[21],[22],[24], D'Alembert e Lagrange possono essere considerati tre sommi matematici del XVIII secolo, che hanno collaborato tra loro in modo notevolmente efficace dando un contributo essenziale alla matematica, alla meccanica analitica e all'ingegneria del secolo seguente [36],[37],[38].

È opportuno sottolineare che fra le inesattezze insinuate nella storia della scienza e della tecnica, figurano alcune che riguardano D'Alembert. Circostanze che sembrano inconciliabili con il rigore professato da un éclairé.

Nella sua vasta letteratura colpiscono, ai nostri giorni, alcuni singolari silenzi. Per esempio sembra non citato un personaggio come Coulomb. Oppure un importantissimo fenomeno meccanico messo in luce

da Eulero verso la metà del XIX secolo, o il prestigioso artificio fisico matematico dei moltiplicatori di Lagrange.

3.7 Mecenati degli «éclairés»

Il pensiero e gli scritti degli Illuministi ebbero un'importanza culturale, politica, sociale ed anche economica, di sorprendente rilevanza. Alcuni dei sovrani cosiddetti Illuminati possono definirsi come i mecenati di non pochi dei giovani, e non più molto giovani, illuministi che accettarono sovrana protezione adducendo giustificazioni che oggi potremmo definire ideologiche. Come è magistralmente espresso nel *Saggio sui rapporti tra intellettuali e potenti* [12](nella introduzione dataci da Franz Brunetti) lo stesso d'Alembert riporta il motto dell'intellettuale contenuto nelle tre parole Verità, Libertà, Povertà quali espressioni di lontananza dal potere che esprime, sempre secondo D'A., la corruzione nelle sue svariate forme, ma essenzialmente nel poter disporre di grande quantità di denaro. Le amichevoli relazioni di D'Alembert con monarchi illuminati sembrano contraddire l'imperativo della triade citata.



Fig. 18. Luigi XV, Re di Francia (1710-1774).

Non pochi personaggi di forte potere, ma non politicamente concordi con gli *éclairés*, osarono soltanto dopo le prime opposizioni, dichiararsi apertamente favorevoli [20],[23]. Potrebbe essere citato il caso del re Luigi XV (1710-1774) di Francia *(Fig. 18),* fortemente condizionato dal conservatore ambiente di Versailles, ma sensibile alle manifestazioni onorifiche che da ogni parte giungevano ai *philosophes.* Sebbene la corte reale esercitasse un autorevole patronato sulle accademie francesi, Luigi XV non esitò a sottoscrivere onorificenze accademiche a favore dell' ancora giovane D'Alembert. Come già detto, nel 1741 fu ammesso all'Académie des Sciences, nel 1754 venne nominato a l'Académie Française (Françoise, secondo la dizione settecentesca) che ancora oggi potrebbe considerarsi l'Accademia di maggior prestigio de L'INSTITUT DE FRANCE. Nel 1772 divenne *Secrétaire Perpetuel* della stessa Accademia.



Fig. 19. Federico Secondo di Prussia (1712-1786).

Federico Secondo (1712-1786) di Prussia (*Fig. 19*), sovrano illuminato, che guardava con occhio benevolo l'evoluzione del pensiero illuminista francese, nella sua qualità di patrono dell'accademia di Berlino, promuove la nomina alla Accademia Prussiana nel 1745 del ventottenne D'Alembert. A lui viene anche offerta la presidenza di quella accademia. Ma, il giovane francese declina il magnifico invito dichiarandosi indegno di tanto onore. I rapporti epistolari con il re di Prussia saranno intensi e di notevole impegno tanto politico quanto scientifico. Pare che del periodo 1760-1783 il carteggio tra D'Alembert e Federico II ammonti a circa 280 lettere.

Caterina Seconda (1729-1796) di Russia, (*Fig. 20*), propone nel 1772 a D'Alembert, che declina l'invito, di recarsi a Pietroburgo per dedicarsi all'educazione del figlio, il Gran Duca Pavel. In quella circostanza pare che Caterina avesse sollecitato per lettere Diderot a convincere D'Alembert ad accettare. Forse ci sono state intense analoghe raccomandazioni anche da parte di Voltaire. Ma la forte opposizione di D'Alembert era giustificata dal fatto che lasciare Parigi avrebbe nuociuto alla sua già malferma salute. A questa debole affermazione pare fosse associata quella, assai più veritiera, che l'allontanarsi dal suo abituale ambiente di lavoro, difficile ma intellettualmente proficuo, sarebbe stato lesivo dei suoi interessi culturali.



Fig. 20. Caterina Seconda di Russia (1729-1796).

3.8 Brevi assenze di D'Alembert da Parigi

Brevi soggiorni a Ferney les Délices, dimora rifugio particolarmente ele-



Fig. 21. Lo spazio vitale di D'Alembert.

gante e riposante per l'originale spirito di Voltaire. Soggiorni di studio a Raincy in Normandia presso una dimora amica. Il viaggio in Italia, allora di gran moda è stato progettato ed iniziato molto spesso ma ogni volta è mancato per atteggiamento rinunciatario di D'Alembert.

La *Fig. 21* suggerisce lo spazio urbano relativamente ridotto in cui si è svolta la vita del grande matematico di fama internazionale che, all'epoca, poteva intendersi universale. Eulero lo considerava un sommo matematico teorico (con alcune riserve alle sue qualità di matematico applicato). I tre luoghi indicati : CM (Collegio Mazzarino), AF (Académie Françoise), «Chez D'Alembert » (M.lle de Lespinasse) indicano i riferimenti importanti di una vita. L'apprendistato in Collegio, la maturità aulica in Accademia, la Casa di M.lle de Lespinasse, malinconica dimora di una vicenda affettiva dolorosa. Si dice dell'umiliante condizione in cui s'era ridotto il grande genio per soddisfare la capricciosa signora. Alla di lei morte D'Alembert subì un dolorosa vicenda psicologica, tanto da abbandonare anche le sue dilette acrobazie scientifiche.

Nella vastissima produzione di D'Alembert figurano opere essenzialmente scientifiche come alcune concernenti l'Astronomia. Altre hanno titolo scientifico, ma in buona parte dedicate alle considerazioni filosofiche di un *Discours Preliminaire*. È il caso ad esempio di *Traité de*

l'Equilibre e de mouvement des fluides (1743). Considerazioni a parte merita l'*Encyclopédie*. Altre quali: *Essai sur la Société des gens de lettres et des grands* (1753), *Elements de philosophie* (1759), *Histoire de la destruction des Jésuites* (1765) [42]sono dedicate ad argomenti politici o letterari, ma nella nostra biblioteca non figurano in edizioni originali. D'Alembert, uomo di fermi principi, di grande capacità intellettuale e coraggiosa capacità d'espressione è considerato, assieme agli altri grandi Illuministi, uno dei precursori della Rivoluzione. Morirà sei anni prima del *quatorze juillet*.

4. Allegati

argomenti relativi a fenomeni studiati da eulero e ripresi dal 1750 da lagrange con maggior precisione ma ignorati da d'alembert.

4.1 ALL. 1: Un fenomeno d'instabilità dell'equilibrio del 1896

A questo proposito si può citare una vicenda a nostro avviso significativa verificatasi verso la fine dell'800. Protagonista è stato Maurice Kœchlin (1856-1946), ingegnere laureato alla Politecnica Federale di Zurigo, capo dell'ufficio progetti e aiutante di campo nella realizzazione della Tour Eiffel (1896). Kœchlin fornì contributi molto significativi, soprattutto applicando e sviluppando i metodi della statica grafica. Metodi che a quel tempo consentivano maggior rapidità di calcolo associata all'immediatezza del controllo della affidabilità dei risultati.

Al Fondo Eiffel, custodito nella Biblioteca del Musée d'Orsay di Parigi, appartengono alcuni disegni e abbozzi autografi. Osservandoli si rilevano, nella simbologia e negli appunti di commento nel calcolo della Torre, criteri che oggi diremmo propri del calcolo allo stato plastico limite. Per quanto riguarda la valutazione degli spostamenti la struttura viene concepita come un insieme di sottostrutture ricondotte, ove possibile, al modello di trave inflessa. Pur nell'ambito di soluzioni staticamente ammissibili, viene studiata è schematizzata l'azione del vento e viene stimata, sovente per eccesso, la risposta tenso-deformativa della struttura.[7]

[7] La sollecitazione specifica, indicata nelle tabelle di Eiffel con la dizione "coefficient de travail", è dell'ordine di 5 kg/mm2, il che la fa apparire comunque contenuta rispetto alla resistenza offerta dal materiale.

Nell'analisi di elementi prismatici inflessi, Eiffel si vale sistematicamente delle formule di Navier. Sembra ignorare i contributi di de Saint-Venant[8] ed anche la trattazione approssimata di Jourawski pubblicata nel 1856.[9] Infatti, nella memoria citata,[10] Eiffel riporta le equazioni dei Lavori Virtuali esprimendo lo scorrimento a taglio in base ad una distribuzione delle sollecitazioni taglianti costante nella sezione e pari alla sollecitazione media.[11]

In una lettera del 1891 l'ingegner Kœchlin[12] aveva lamentato l'ingobbamento dell'anima di alcune travi della prima terrazza. Kœchlin riporta il parere di Eiffel, che tende a minimizzare l'inconveniente pur non sottraendosi all'impegno di intervenire con irrigidimenti.

La lettera concorre, insieme ad altri documenti, a rafforzare il sospetto che Eiffel avesse una conoscenza puramente fenomenologica ed empirica dei problemi relativi alla stabilità dell'equilibrio elastico, che pure erano stati impostati rigorosamente da Eulero un secolo prima.[13]

---

[8] Ad Adhérnar Barré de Saint-Venant (1797-1886), come Navier allievo dell'École Polytechnique e successivamente dell'ENPC, nonché membro de l'Académie des Sciences, si deve la soluzione rigorosa di alcuni problemi fondamentali di meccanica dei solidi nel quadro della teoria dell'elasticità alla Cauchy. I risultati conseguiti saranno, come universalmente noto, innovativi, dotati di un forte carattere di sintesi, e tali da esercitare un'influenza determinante sulla meccanica dei solidi e delle strutture anche nell'assetto metodologico ed operativo attuale.

[9] JOURAWSY, Sur la résistance d'un corps prismatique et d'une pièce composée en bois ou en tole d'acier soumise à une force perpendiculaire à leur longueur, Ann. des Ponts et Chaussées, 1856, torne 2 [Bibl. ENPC].

[10] Eiffel G., Memoire présenté a l'appui du projet definitif du Viaduc de Garabit, Paris, 1889 [Archives, Historical collections, Institution of Civil Engineering, London].

[11] La distribuzione assunta della sollecitazione tagliante implica, come noto, che il coefficiente di forma sia sistematicamente assunto pari ad 1 nel calcolo dello scorrimento. A parziale giustificazione si potrebbe obbiettare che l'errore è modesto poiché si tratta in generale di travi a doppio T (o riconducibili a tali) e che trattandosi per lo più di travi snelle l'influenza deformativa del taglio è ragionevolmente trascurabile.

[12] [Fonds Eiffel ARO 1981 1210 (6)].

[13] Per parte sua Kœchlin dichiara «L'attention des ingénieurs a été attiré d'une manière plus speciale ces derniers temps sur les éffects du flambage qui sont encore peu connus» e dimostra di avere chiara coscienza dei fenomeni di instabilità tanto da raccomandare i rinforzi da effettuare sulla torre Eiffel a causa dell'ingobbamento delle anime di travi (v. Lettere di Kœchlin a M. Thomas, administrateur de la Tour Eiffel [Fonds Eiffel, Musée d'Orsay, AR01881.1250(6) e 1250(8)]).

4.2 ALL. 2: "Teoria dell'asta caricata di punta con valutazione dell'equilibrio" dovuta a Eulero e pubblicata nel 1759 [4]

La curiosa scoperta del carico critico di una trave soggetta a una forza assiale di compressione, o, come si suol dire, caricata di punta, non suscitò interesse, né presso i matematici, né presso i tecnici, nonostante che Musschenbroek ne avesse osservato già da tempo la rispondenza sperimentale, ancor prima del saggio di Eulero.

Sarà lo stesso Eulero a ritornare sull'argomento in una Memoria pubblicata nel 1759. «Sulla sollecitazione delle colonne»[14] (che il Todhunter giudica «uno dei più importanti contributi euleriani alla teoria dell'elasticità»). Egli è rimasto colpito dall'anomalia degli effetti dovuti al carico di punta. Mentre una forza agente perpendicolarmente all'asse induce sempre un effetto e «se la forza è grande la flessione è rilevante, se la forza è piccola la flessione è forse impercettibile, ma esiste» , al contrario una forza assiale opera in modo «non poco paradossale»: fino a che essa non abbia raggiunto un certo valore critico, l'inflessione è impossibile. Non contraddice, questo, il «principio di continuità della natura»?

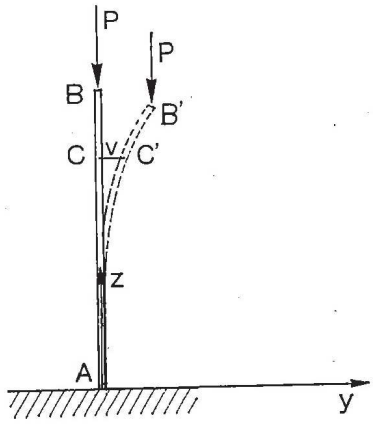


Fig. 22.

Per studiare più agevolmente il fenomeno, Eulero usa una trattazione approssimata, cioè una teoria lineare. Sia data, dunque, la trave AB di lunghezza 1, vincolata come in *Fig. 22* su cui grava il carico di punta P. Riferita la linea d'asse all'ascissa z con origine in A, limitiamo l'attenzione al caso in cui ogni punto C può subire uno spostamento infinitesimo, portandosi in C'; ovviamente il segmento CC' è perpendicolare all'asse z, rappresenta cioè uno spostamento trasversale che indichiamo con la funzione: $v = v(z)$. Supponiamo ora che la trave, anziché mantenersi rettilinea, si disponga in una configurazione variata di equilibrio, ad esempio la $AC'B'$. Ci si propone di determinare quale valore

[14] L. Eulero, *Sur la force des colonnes*, Memoires de l'Academie des Sciences de Berlin, 13, pp. 252-282, (1757) 1759.

debba assumere il carico P affinché tale configurazione variata sia effettivamente di equilibrio.
Con un breve calcolo, che omettiamo, Eulero trova per P il valore critico:

$$P_{\mathrm{cr}} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2} ,$$

dove con E si indica il modulo elastico del materiale e con J il momento d'inerzia della sezione retta della barra. In altri termini, si può dire che in corrispondenza del carico-critico possono esistere, accanto alla configurazione rettilinea, infinite altre configurazioni variate, tutte infinitamente prossime alla fondamentale (rettilinea) e tutte rispettose delle condizioni di vincolo.

Il silenzio di D'Alembert stupisce osservando che la nota di Eulero riguardante la stabilità dell'equilibrio elastico, causa di sbandamento di elementi piani sottili caricati nel loro piano, risale al 1770.

4.3 ALL. 3: A proposito dei moltiplicatori di Lagrange

Vale la pena di annotare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange pubblicati nella prima edizione del 1788 di *Méchanique Analitique* nella parte dedicata alla statica. Si dedicano molte pagine alla definizione e tecnica dei moltiplicatori necessari per rendere più agili le soluzioni di problemi variazionali. L'argomento è ripreso recentemente Da Bottazzi (2003) che non indica edizioni precedenti a quella citata. In verità, ancora in *Méchanique Analitique,* lo stesso Lagrange nell'introdurre l'argomento cita Eulero (1740) che ne aveva discusso, seppure in forma più complessa, ma comunque rigorosamente impostata. La pubblicazione da parte di Lagrange è più raffinata, ma di circa cinquant'anni posteriore. Non è chiara la ragione per cui D'Alembert, morto nel 1783, non fosse venuto a conoscenza degli studi di Eulero e di Daniele Bernoulli. Si può ricordare a titolo di esempio un problema di minimo peso strutturale, scritto con tecniche alla Riccci-Curbastro quale testimonianza della validità del sistema anche in campo ingegneristico.[36]

4.4 ALL. 4: Predecessori scientifici e alcuni contemporanei



Fig. 23. Cartesio (1596-1650).



Fig. 24. John Locke (1632-1704).

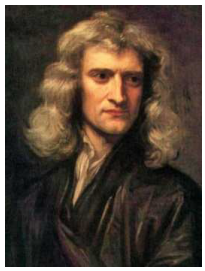


Fig. 25. Isaac Newton (1642-1727).



Fig. 26. Gottfried W. Leibniz (1646-1716).

Renato Cartesio. Filosofo, matematico, naturalista francese.Nel 1614 si iscrive alla facoltà di giurisprudenza di Poitiers. Si dedica alla medicina. Volontario nell'esercito di M. di Nassau e in quello del Duca di Baviera partecipa alla guerra dei Trent'anni. Si reca in Italia, Olanda, Germania, Boemia e Ungheria. Nel 1624 è a Roma, Loreto e Firenze. Nel 1629 lascia Parigi dove ha scritto gran parte delle sue opere. Nel 1649 si reca a Stoccolma dove muore nel 1650 alla Corte della Regina Cristina di Svezia. Fondamentale Géométrie stampata a LEIDA nel 1637 e Dioptrique et Météores, precedute dal famoso *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences.* L'autore fonde algebra e geometria e introduce il piano delle coordinate cartesiane. E' considerato un fondatore della geometria analitica. Studia le equazioni di 2° grado e i segni delle loro radici (regola di Cartesio).

John Locke, inglese (Wrington 1632-Oates 1704). Promotore dell'illuminismo inglese ed europeo, primo teorico del regime politico liberatore, iniziatore della gnoseologia moderna, seguace di Christ Church Oxford, fisico e fisiologo. Nel 1668 membro della [Royal Society e Olanda] a 54 anni. Nel 1684 Epistola [de Toleranti].Del 1690 è il Saggio sull'intelletto umano. Idee semplici ed idee complesse per l'*Encyclopédie* con la sollecitudine di Voltaire.

Isaac Newton (1642-1727). Esimio scienziato inglese, fisico e matematico in particolare anche dedito all'astronomia, alla meccanica e all'ottica. Celebre lo sviluppo in serie del binomio, all'impostazione del metodo delle flussioni (derivate) e del calcolo differenziale. Nel 1669 è a Cam-

bridge e raccoglie le sue già numerose opere in *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* pubblicato nel 1711. La massima opera di Newton è *Philosophiae naturalis principia mathematica* del 1687 con le basi della meccanica e la legge della gravitazione universale. Sulla tomba nell'Abbazia di Westminster è scritto: «*Sibi gratulentur mortales, tale tamtumque extitisse humani generis decus*».

Gottfied Wilhelm Leibniz (1646- 1716). Filosofo, matematico e scienziato tedesco. Ha lasciato tracce in ogni ramo dello scibile. Nella sua matematica si rileva come il suo pensiero sia conseguenza dell'attività filosofica e speculativa. Con Newton è considerato uno dei fondatori del calcolo infinitesimale. A lui si deve la creazione del calcolo differenziale con l'opera *Nova methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus...* del 1684. A lui si devono le notazioni dx, dy per i differenziali e dy/dx per le derivate e $\int dx$ per gli integrali. Opera del 1666 è *Dissertatio de arte combinatoria* e nell'aritmetica fu precursore del sistema di numerazione binaria.

Niccolò Copernico (1743-1543). Astronomo e matematico polacco nato nel 1473 a Torun, laureato all'Università di Ferrara nel 1503, muore a Fromborck nel 1543. Famoso per l'affermazione della Teoria Eliocentrica che pone il Sole al centro delle orbite concentriche dei pianeti del sistema solare. Fu anche ecclesiastico, giurista, governatore e medico. Sua opera principale del 1542 *De Revolutionibus orbium Coelestium*. Si dice che l'autore abbia visto la prima edizione della sua opera negli ultimi istanti della sua vita. Opera considerata postuma e quindi tale da evitare a Copernico le difficoltà connesse con le censure del Santo Uffizio. Durante la stesura, l'opera fu sempre presentata come un semplice modello di costruzione matematica.

Galileo Galilei (1564-1642). Matematico, astronomo e filosofo pisano. Titolare di matematica dell'Università di Padova nel 1592. Nel 1611 è a Roma dove entra nell'Accademia dei Lincei. Le prime controversie con il Sant'Uffizio di Roma cominciano nel 1613 per la denuncia di una lettera di Galileo a padre B. Castelli, sui limiti di scienza e fede. Come noto le controversie si sono protratte sino al 1632 con la pubblicazione a Firenze del *Dialogo sui due massimi sistemi del mondo,* il tolemaico ed il copernicano. Galileo, sostenitore del secondo, fu condannato nel 1633 dal Sant'Uffizio all'abiura e al carcere. Confinato a Roma, a Siena e finalmente nella sua villa di Arcetri, dove, cieco dal 1637, finì la sua vita. E' da ritenere il fondatore del metodo sperimentale con particolare riferimento a sensate esperienze

e certe dimostrazioni. Nel 1638 è edita a Leida l'opera *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* attinenti alla meccanica ed i movimenti locali, per i tipi degli Elzeviri, con i fondamenti della scienza moderna.

4.5 ALL. 5: Contemporanei e corrispondenti di D'Alembert

Georges-Louis Leclerc comte de Buffon (1707-1788) (Montsard 1707- Paris 1788), Naturalista, zoologo e botanico, evoluzionista d'impronta dinamica nello studio degli organismi viventi (100 anni prima di Darwin nella definizione di genere e specie). A lui si deve l'aforisma «*Le Style est l'homme lui même*». Sua la monumentale *Histoire Naturelle générale et particulière* (1749 al 1789) in 36 volumi realizzate dal 1749 al 1789.

Horace-Benedict De Saussure (Ginevra 1740-1799). Insigne naturalista. A soli ventidue anni ottenne la cattedra di filosofia sperimentale nell'Accademia di Ginevra. Nel 1763 publicò il suo primo saggio di botanica. E successivamente *De electricitate* (1776), *Exposition abréjée de l'utilité des conducteurs électriques* (1771) e *de Aqua* (1771). Frequenti viaggi in Francia, Belgio, Inghilterra, Italia (ascensione dell'Etna). Nel 1783 pubblicò *Essai sur l'hygrometrie*. Nel 1786 si dedicò all'esplorazione delle Alpi stabilendo la progressiva diminuzione della pressione in funzione dell'altitudine, studiandone gli effetti sugli uomini e sugli animali. Nel 1787 salì tra i primi sul Monte Bianco, calcolandone con precisione l'altezza. Nel 1788 compì ascensioni di molte cime del Monte Rosa. Le sue esperienze contribuirono notevolmente allo studio della geologia e lo indussero a perfezionare molti strumenti (l'anemometro, l'elettrometro, l'igrometro, ed altri). Nel 1794 avverse condizioni di salute lo costrinsero ad abbandonare le sue ricerche. Pubblicò molti articoli nel *Journal de Physique* e nel *Journal des mines*. È una figura di grande fascino che associò ad un intelletto curioso della natura una prestanza fisica fuori del comune coltivata con intelligenza e sagacia.

Di quell'epoca e di Milano possiamo ricordare Paolo Frisi, Francesco Algarotti, Ruggero Boscovich, Lorenzo Mascheroni e Gaetana Agnesi, che dimostrarono intensa ammirazione per il grande D'Alembert.

BIBLIOGRAFIA

[1] A.A.V.V.:*Enseignement et Diffusion des Sciences en France au XVIIIe siècle*, Paris (sous la direction de René Taton), (1964).

[2] A.A.V.V.: *Sfogliando la MÉCHANIQUE ANALITIQUE, 1788, Paris*, a cura di G. Sacchi Landriani e A. Giorgilli (2006).

[3] Baldoni, R.: *La Matematica nell'Enciclopedia di Diderot e D'Alembert*, Mateureka, Rimini (2000).

[4] Benvenuto, E.: *La Scienza delle Costruzioni e il suo Sviluppo Storico*, Ed. Sansoni, Firenze (1981).

[5] Beccaria, C. *Dei Delitti e delle Pene*, Ed. Einaudi, Torino. A cura di Franco Venturi (1994).

[6] Bussotti, P.: *On the Genesis of the Lagrange Multipliers*, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol.117 N° 3. (2003)

[7] D'Alembert: *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides. Pour servir de suite au traité de dynamique...*, Paris (1744).

[8] D'Alembert: *Recherches sur la précession des equinoxes et sur la mutation de l'axe de la terre dans le système newtonien*, Paris (1749).

[9] D'Alembert: *Recherches sur différents points importants du système du monde...* , Paris. (1754-1756)

[10] D'Alembert: *Traité de dynamique, dans lequel les loix de l'équilibre & du mouvement des corps sont réduits au plus petit nombre possible, & demontrées d'une maniere nouvelle...* , Paris (1758).

[11] D'Alembert: *Histoire des membres de l'Académie franç oise, morts depuis 1700 jusq'en 1771, pour servire de suite aux Eloges imprimés & lus dans les Séances publiques de cette Compagnie.* Par M. D'Alembert... Cluny, (5 voll. ed.postuma). (1787)

[12] D'Alembert: *Saggio sui rapporti tra intellettuali e potenti* — Ed. Italiana a cura di Franz Brunetti, Einaudi Torino 1977 (1753).

[13] Darnton R.: *L'aventure de l'Encyclopédie 1775-1800*, Librairie Académique Perrin, Paris. A Cura di Pierre Crépel (1982).

[14] Due de Castries: *Mirabeau*, Ed. Fayard, Paris (1960).

[15] Duhet P.M.: *Les Femmes et la Révolution 1789-1794,* Archives Gallimard Juilliard, Paris (1977).

[16] Eulero, L.: *Eléments d'algèbre*, 2 voll., Lyon (1774).

[17] Eulero L.: *Institutiones calculi differentialis cum eius usu in analysis finitorum ac doctrina serrerum*, Ticini, 1787 (1774) (1787).

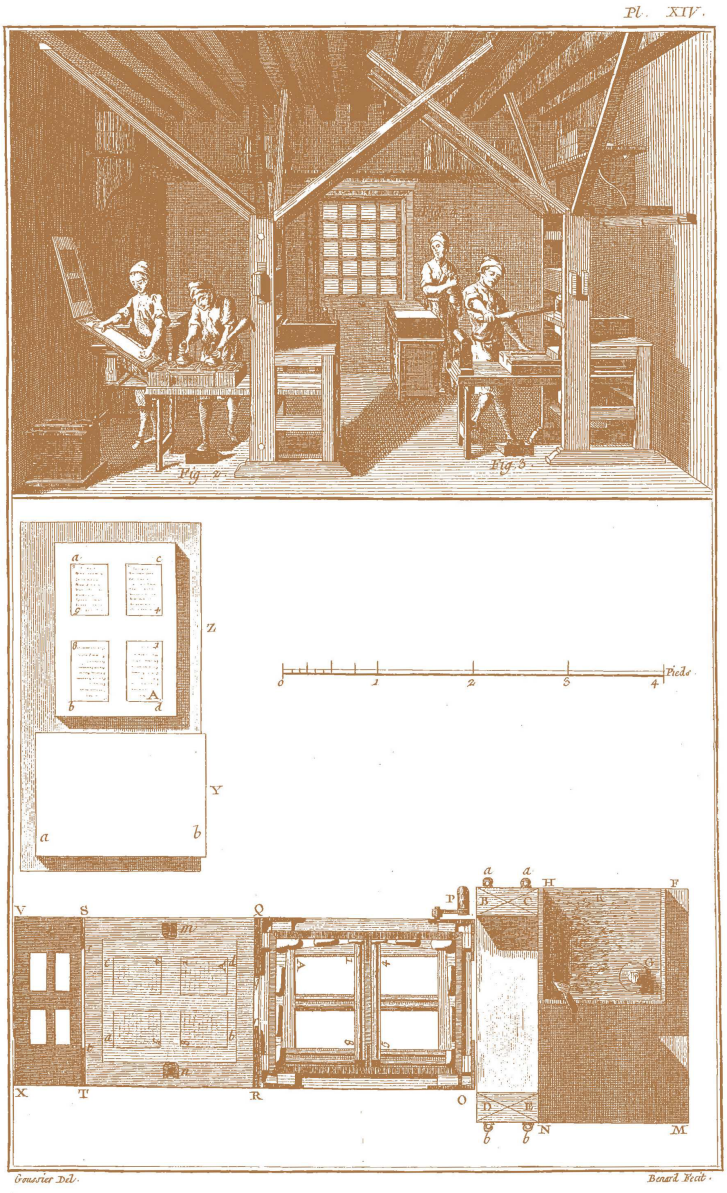
[18] Eulero L., (1768-1794) *Institutionum calculi integralis*, 4 voll., "Petropoli", 1768-1794.

[19] Eulero L., (1748) *Introductio in analysis infinitorum*, 2 voll. Lausanne, 1748.

[20] Eulero L., (1843) *Lettres a une princesse d'Alemagne sur divers sujets de physique et de philosophie... avec une introduction et des notes par Emil Saisset*. Paris, 1843.

[21] Eulero L.: *Mechanica sive motus scientia analytice exposita*, Petropoli, Acad. Scientiarum, 2 voll., (1736).

[22] Eulero L.: *Methodus inveniendi lineas curvas maxima minive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimerimetrici latissimo sensu accepti*, Lausanne et Genevae, 1744.
[23] Eulero L.: *Saggio di una difesa della divina rivelazione* traduzione dal tedesco coll'aggiunta dell'esame dell'argomento dedotto dall'abbreviamento dell'anno solare e planetario, Pavia, (1777).
[24] Eulero L.: *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum*, Rostochii, (1765).
[25] Enciylopedie (D' A. & Diderot) .... Paris, voll. 17 testo & 11 tav. (1751).
[26] Furet F., Richet D.: *La Révolution Franç aise*, Ed. Fayard, Paris (1973).
[27] Guidi C.: *Il Secolo Bello*, Ed. Il Melangolo, Genova (2015).
[28] Guidi C.: *La fabbrica dell'Ateismo*, Ed. Il Melangolo, Genova (2016).
[29] Guidi C.: *Le Follie Libertine della Reggenza*, Ed. Il Melangolo, Genova (2017).
[30] Godechot J.: *La Prise de la Bastille*, Ed. Gallimard, Mayenne (Fr) (1974).
[31] Lagrange J.L.: *Méchanique Analitique*, 1-ère Ed. Paris (1788).
[32] Lagrange J.L.: *Mécanique Analytique*, 2ème Ed., 2 vol. Paris (1815).
[33] Lagrange J.L.: *Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du calcul differentiel dégagés de toute conmsidération d'infintement petits ou évanouissans, de limites ou de fluxions et réduits a l' analyse algébrique des quantités finies*, Priarial, anV.
[34] Lanson G.: *Voltaire Dizionario Filosofico*, Ed. Oscar Mondadori, Verona (1970).
[35] Pepe L.: *D' Alembert, I Lumi L'Europa*, Ed. F. Serra, Pisa Roma (2008).
[36] Sacchi Landriani G.: *Formulation Variationelle de pois minimale des structures*, Journal de Mécanique, Vol.10 N° 1, Milano (1971).
[37] Sacchi Landriani G.: *I Riconoscimenti Accademici a Gustave Eiffel*, Rend. Istituto Lombardo, Milano (2002).
[38] Sacchi Landriani G.: *Emil Winkler Ingegnere del XIX Secolo*, Rend. Istituto Lombardo, Milano (2010).
[39] Sacchi Landriani G.: *Su Alcuni Matematici nel Secolo dei Lumi in Lombardia*, Rend. Istituto Lombardo, Milano (2011).
[40] Schmidt C.: *Diderot Encyclopédie*, Booking International, Bratislava (1994).
[41] Voltaire (1764): *Dizionario Filosofico*, Ed. G. Einaudi (1955).
[42] Wikipedia, voci varie.



Imprimerie, L'Opération d'Imprimer et Plan de la Presse.

Istituto Lombardo (Rend. Scienze) 152, 247-292 (2018)

D'ALEMBERT FISICO E MATEMATICO

ANTONIO GIORGILLI (*)

Sunto. — Si espone in forma sintetica parte del contenuto di alcune opere matematiche di D'Alembert. Si dedica particolare attenzione al *Traité de dynamique*, e precisamente alla parte riguardante i principi su cui viene fondata la Meccanica. Qui trova spazio la formulazione del metodo che è poi entrato nei trattati di meccanica col nome di *Principio di D'Alembert*. Poi si passano in rassegna alcune applicazioni a problemi di Astronomia. Il contenuto di questa nota è stato presentato nell'ambito di un Incontro di Studio dedicato alle opere di D'Alembert possedute dalla Biblioteca dell'Istituto Lombardo Accademia di Scienze e Lettere.

* * *

Abstract. — Some mathematical treatises of d'Alembert are presented in in synthetic form. Particular attention is paid to the *Traité de dynamique*, namely the part concerning the principles on which Mechanics is founded. This includes the formulation of the method later entered introduced in treatises on Mechanics under the name *D'Alembert's Principle*. Then some applications to problems in Astronomy are discussed. The content of the note has been presented in a talk given at the Istituto Lombardo Accademia di Scienze e Lettere, in the context of a conference dedicated to the works of D'Alembert owned by the Library.

1. Apologia

Quando mi fu proposto di prendere parte a un Incontro di Studio su D'Alembert ebbi molte esitazioni. L'obiettivo era presentare i volumi delle opere di D'Alembert che fanno parte del patrimonio librario dell'Istituto Lombardo Accademia di Scienze e Lettere. A me spettava il compito di occuparmi delle opere a carattere matematico. Un'indagine affascinante, se non altro per il peso di un personaggio come D'Alembert; allo stesso

(*) Istituto Lombardo Accademia di Scienze e Lettere, Milano. Università degli Studi di Milano, Italy. E-mail: antonio.giorgilli@unimi.it



Fig. 1. Le opere matematiche di D'Alembert elencate nel testo. Fatta eccezione per la prima edizione del Traité de Dynamique (1743), tutte sono in possesso della Biblioteca dell'Istituto Lombardo.

tempo, un compito decisamente impegnativo: illustrare, nel tempo di una conferenza, sei opere che spaziano dalla Meccanica alla Dinamica dei Fluidi e all'Astronomia.

Alla fine ha prevalso la curiosità: chiudendo gli occhi alle difficoltà, ci ho provato. Sono perfettamente cosciente che si tratta di un argomento che in larga misura ricade nell'ambito di competenza degli storici: le idee

di D'Alembert hanno lasciato tracce profonde, soprattutto negli sviluppi successivi della Meccanica, ma ben poco è rimasto del formalismo da lui utilizzato. Sono altrettanto cosciente di non potermi qualificare come uno storico della Matematica; spero che questa nota non sia considerata, da parte degli addetti ai lavori, come una sgradita invasione di campo.

Comincio con l'elenco dei volumi disponibili *(Fig. 1)*.

(i) *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides,* 1744.

(ii) *Recherches sur la précession des equinoxes et sur la nutation de l'axe de la terre,* 1749.

(iii) *Recherches sur differens points importans du Système du Monde,* in tre volumi a loro volta suddivisi in sei libri:

  (1) *Théorie de la Lune*, vol. primo (1754), libro primo.

  (2) *Recherche de l'orbite des Planetes principales dans le systême de l'attraction*, vol. secondo, libro secondo.

  (3) *Nouvelle recherches sur la Précession des Equinoxes,* & *sur la figure de la Terre* & *de la Lune*, vol. secondo, libro terzo.

  (4) *Nouvelles observations sur les Tables de la Lune*, vol. terzo (1756), libro quarto.

  (5) *Nouvelles remarques sur l'Orbite de la Terre*, vol. terzo (1756), libro quinto.

  (6) *Nouvelles recherches astronomiques et physiques sur la figure de la Terre*, vol. terzo (1756), libro sesto.

(iv) *Traité de dynamique, seconda edizione,* 1758.

A questa lista è d'obbligo premettere la prima edizione del *Traité de dynamique,* pubblicata nel 1743, benché non faccia parte del patrimonio librario dell'Istituto. Il motivo è che in quel trattato D'Alembert espone i principi sui quali si fondano le opere successive. Inoltre la seconda edizione del 1758 amplia considerevolmente il contenuto della prima, ma non introduce modifiche sostanziali all'esposizione dei principi: le aggiunte si concentrano su un numero notevole di applicazioni.

La vastità degli argomenti ha reso indispensabile limitare il campo d'azione. Ho privilegiato i fondamenti della Meccanica, a cui ho dedicato maggior spazio, e tre argomenti di astronomia particolarmente dibattuti all'epoca di D'Alembert: la precessione degli equinozi, il moto della Luna e le ineguaglianze nei moti dei Pianeti maggiori. Ho dato meno peso alla dinamica dei fluidi: un'esposizione ragionevolmente completa avrebbe di gran lunga superato i limiti di tempo concessi a una conferenza – e i limiti di spazio concessi a questa nota.

TABLE DES TITRES

Contenus en cet Ouvrage.

PRE'FACE. page j
Définitions & Notions préliminaires. page 1

PREMIERE PARTIE.

Loix générales du Mouvement & de l'équilibre des Corps.

CHAPITRE I. *DE la force d'inertie, & des propriétés du Mouvement qui en réſultent.* page 3
Du Mouvement uniforme. p. 8
REMARQUE *ſur la meſure du tems.* p. 9
Du Mouvement accéléré ou retardé. p. 13
REMARQUE *I. Sur les forces accélératrices.* p. 16
REMARQUE *II. Sur la comparaiſon des forces accélératrices entr'elles.* p. 20
CHAP. II. *Du Mouvement compoſé.* p. 22

TABLE DES TITRES.

Du Mouvement en ligne courbe, & des forces centrales. page 27
CHAP. III. *Du Mouvement détruit ou changé par des obſtacles.* p. 31
Du Mouvement d'un Corps le long d'une ſurface Courbe. p. 34
De l'Equilibre. p. 37

SECONDE PARTIE.

Principe général pour trouver le Mouvement de pluſieurs Corps qui agiſſent les uns ſur les autres d'une maniére quelconque, avec pluſieurs applications de ce Principe.

CHAPITRE I. *EXpoſition du Principe.* page 49
CHAP. II. *Propriétés du centre de gravité commun de pluſieurs Corps, déduites du Principe précédent.* p. 52
CHAP. III. *Problêmes où l'on montre l'uſage du Principe précedent.* p. 69
CHAP. IV. *Du Principe de la conſervation des forces vives.* p. 169

Fin de la Table des Titres.

Fig. 2. *L'indice del Traité de Dynamique nella prima edizione (1743).*

Va da sé che limitando la discussione ai temi elencati si lasciano in ombra altri contributi di notevole interesse, tra cui (per citarne alcuni): gli studi sulla musica e sulle cause dei venti; il criterio di convergenza delle serie; l'enunciato del teorema fondamentale dell'algebra (dimostrato anni dopo da Gauss); il paradosso della dinamica dei fluidi; l'equazione della corda vibrante e la propagazione delle onde. A parziale giustificazione delle omissioni – che qualche lettore potrebbe a buon diritto giudicare deplorevoli – dirò che sono gli argomenti che D'Alembert stesso ha tralasciato nella seconda edizione della *Dynamique*, perché, dice, *"auroient trop grossi le Volume que je mets à jour"*.

2. I principi della Dinamica

Nel 1743 il giovane e arrembante D'Alembert, allora ventiseienne ma già membro dell*Académie Royale des Sciences*, pubblica il suo primo trattato di ampio respiro: il *Traité de dynamique* [2]. Si tratta di un volume di 186 pagine, a cui se ne aggiungono 26 di *Préface*. L'opera si divide in due parti; l'indice è riportato in *Fig. 2.*

Il *Préface* che apre il trattato non lascia dubbi su quale e quanto ambizioso sia il programma di D'Alembert. L'*incipit* è riportato in *Fig. 3*. D'Alembert afferma che la certezza della Matematica si fonda sulla semplicità del suo oggetto di studio. Poi chiarisce il suo pensiero. I principi astratti fondati sull'evidenza, dice, hanno un grado di certezza superiore a quelli fondati sull'esperienza. Così in una scala decrescente di semplicità, si collocano l'Algebra e la Geometria, seguite dalla Meccanica. Più ci si addentra in questioni che riguardano la fisica, e che impongono il ricorso all'esperienza, minore è il grado di certezza della Scienza in oggetto.

Da qui l'obiettivo: sollevare la Meccanica al livello della Geometria. In altre parole: fondare la Meccanica su principi puramente astratti, che siano il più semplici possibile. L'idea che sta alla base è che si debba *fondare la Meccanica solo sul concetto di movimento*: come in Geometria si costruisce una linea pensando di muovere con continuità un punto, o una superficie muovendo una linea, o ancora un solido muovendo una superficie, così in Meccanica si descrive il movimento pensando di trasportare un corpo da un posto all'altro. La differenza sta nel fatto che in Geometria si considerano nel loro insieme le posizioni raggiunte; in Meccanica si deve tener conto anche del *tempo* che un corpo impiega a occupare posizioni diverse.

LA certitude des Mathematiques eſt un avantage que ces Sciences doivent principalement à la ſimplicité de leur objet. Il faut avouer même, que comme toutes les parties des Mathematiques n'ont pas un objet également ſimple, auſſi la certitude proprement dite, celle qui eſt fondée ſur des Principes néceſſairement vrais & évidens par eux-mêmes, n'appartient ni également, ni de la même maniére à toutes ces parties. Pluſieurs d'entr'elles, appuyées ſur des Principes Phyſiques, c'eſt-à-dire ſur des vérités d'Expériences, ou ſur de ſimples hypotheſes, n'ont, pour ainſi dire, qu'une certitude d'Expérience, ou même de pure ſuppoſition. Il n'y a, à parler exactement, que celles qui traitent du calcul des grandeurs, & des propriétés générales de l'étendue, c'eſt-à-dire l'Algébre, la Geométrie & la Méchanique, qu'on puiſſe regarder comme marquées au ſceau de l'évidence. Encore y a-t'il dans la lumiére que ces Sciences préſentent à notre eſprit, une eſpece de gradation, &, pour ainſi dire, de nuance à obſerver. Plus l'objet qu'elles embraſſent eſt étendu, & conſidéré d'une maniére générale & abſtraite, plus auſſi leurs Principes ſont exempts de nuages & faciles à ſaiſir. C'eſt par cette raiſon que la Geométrie eſt plus ſimple que la Méchanique, & l'un & l'autre moins ſimples que l'Algébre.

Fig. 3. Incipit del Préface al trattato sulla dinamica del 1743.

Date le premesse, il concetto di forza viene bandito dai fondamenti della Meccanica. D'Alembert identifica tre principi astratti: (i) il principio d'inerzia; (ii) la legge di composizione dei movimenti; (iii) le leggi dell'equilibrio. Tutta la sua costruzione si regge su questi soli principi. Avendo rifiutato il concetto forza, anche la proporzionalità tra forza e accelerazione e il principio di azione e reazione, che per Newton sono la seconda e la terza legge della Meccanica, vengono rimossi.

2.1 Il contesto storico scientifico

Collocare il trattato di D'Alembert nell'ambiente scientifico che precede la sua opera non è agevole – soprattutto per chi non può qualificarsi come storico della Matematica. La lunga prefazione descrive accuratamente quelli che l'autore considera i suoi contributi e include riferimenti a teorie correnti, ma è avara di informazioni sulle sue fonti. Nel resto del trattato si trovano occasionalmente riferimenti, spesso critici, alle opere di altri scienziati. Talvolta ne sono riportati i nomi, come nei casi di Newton o Eulero o Bernoulli o Leibniz o Mac-Laurin, per fare qualche esempio; in altri casi c'è solo un riferimento in termini generici, come quando nomina *"une Dame illustre par son esprit & par son savoir"*. I contemporanei certamente sapevano benissimo a chi si riferisse; per noi è meno immediato riconoscervi Gabrielle Émilie Le Tonnelier de Breteuil, Marquise du Chastelet (1706-1749), autrice di un trattato *Institutions de Physique* (1740) e di una traduzione commentata dei *Principia* di Newton (1749), e attiva partecipante al dibattito sulle *forces vives*. In termini molto rozzi si può dire che D'Alembert considera tutte le opere precedenti come carenti di rigore, e si propone di rimediare a tutte quelle carenze.

Una prima questione riguarda il concetto stesso di movimento, e la sua relazione con lo spazio. Qui l'autore richiama la tesi sostenuta dai seguaci di Cartesio (*Secte à la verité fort affoiblie aujourd'hui*, aggiunge): non c'è distinzione tra spazio e corpi. Il movimento, in particolare quello dei corpi celesti, è generato da vortici in un non meglio definito *etere*. La critica di D'Alembert è che in un contesto simile diventa difficile concepire la possibilità stessa del movimento. Come minimo, afferma, occorre *riconoscere l'impenetrabilità come una caratteristica essenziale dei corpi*. Lo spazio diventa solo il riferimento che consente di determinare la posizione dei corpi.

Una seconda questione riguarda il concetto di *forza*, che nella teoria di Newton è responsabile del movimento. I principi di Newton trovano fondamento nell'esperienza: dalla forza dovuta all'azione diretta tra corpi, ad esempio tramite urto, a quella identificata tramite il movimento generato, come nel caso della dinamica planetaria, a prezzo di introdurre un'azione a distanza. In questo secondo caso la forza, per Newton, diventa un ente matematico utile, sulla cui natura non si impegna. La critica di D'Alembert è che si tratta di un concetto vago e oscuro: nella migliore delle ipotesi possiamo interpretare la forza come la capacità di un corpo in movimento di superare degli ostacoli, il che presuppone un contatto e

confligge con l'idea di un'azione che si esercita tra corpi tra loro distanti. Conta solo il movimento con le sue possibili variazioni.

La terza questione entra nel merito della discussione sulle cosiddette *forze vive*. La domanda che si pone è se la forza da attribuire a un corpo debba considerarsi come prodotto della massa per il quadrato della velocità (mv^2, che noi chiamiamo energia cinetica, a parte un fattore $1/2$), oppure come prodotto della massa per la velocità (mv, che noi chiamiamo quantità di moto). Paladini della prima ipotesi sono i seguaci di Leibniz; la seconda risale a Cartesio ed è sostenuta dalla scuola francese che si ispira a Malebranche e dalla scuola inglese che fa riferimento a MacLaurin. D'Alembert ritiene che: *"Malgré les disputes que cette question a causées, l'inutilité parfaite dont elle est pour la Mécanique m'a engagé à n'en faire aucune mention dans l'Ouvrage que je donne aujourd'hui."*. Coerentemente con la sua convinzione che il concetto di forza sia oscuro, se non fuorviante, egli riconduce la discussione alle cause che possono modificare il movimento: non ha senso attribuire la forza a un corpo o considerarla come inerente ad esso; ha senso invece domandarsi quanti e quali ostacoli possa vincere un corpo in movimento. Posto il problema in questi termini, l'uso della quantità di moto o dell'energia cinetica diventa questione di opportunità o di preferenza personale nella scelta del metodo – quando non un mero gioco di parole. E qui non rinuncia a un giudizio caustico sulla questione: *"Aussi n'auroit-elle pas sans doute enfanté tant de volumes, si on se fut attaché à distinguer ce qu'elle renfermoit de clair & d'obscur. En s'y prenant ainsi, on n'aurait besoin que de quelques lignes pour décider la question: seroit-ce là ce que la plûpart de ceux qui ont traité cette matiére, auroient voulu éviter?"*. Ritornerà sull'argomento solo nel capitolo V e ultimo della parte seconda (edizione del 1743), intitolato *"Du Principe de la conservation des forces vives"*: a suo avviso, si tratta non di un *principio*, ma di un *teorema*, applicabile a una serie di casi, da dimostrare partendo dai principi.

2.2 Definizioni e concetti preliminari

Il trattato vero e proprio inizia con un breve paragrafo in cui si danno alcune definizioni preliminari, che espongo in forma alquanto abbreviata.

(i) *Corpi:* porzioni di spazio impenetrabili. La parte di spazio che il corpo occupa è detta *luogo di un corpo*.

(ii) Un corpo è *a riposo* se occupa costantemente lo stesso luogo. Un corpo è *in movimento:* se occupa successivamente e con continuità dei luoghi contigui.

(iv) *Tempo:* è un concetto che nasce dal fatto che un corpo non può occupare due luoghi distinti; pertanto non può spostarsi da un luogo all'altro senza occupare tutte le posizioni intermedie, in successione ordinata: noi diciamo che impiega un certo tempo.

(v) Poiché lo spazio percorso da un corpo in movimento è divisibile all'infinito, lo stesso vale per il tempo. Un corpo che si muove in linea retta senza subire altri mutamenti che il cambio di posizione non può che percorrere spazi eguali in tempi eguali; è il *moto uniforme*. Se gli spazi percorsi aumentano o diminuiscono si parlerà di moto *accelerato* o *ritardato*.

Se mi è consentito aggiungere un breve commento, direi che qui emerge l'opposizione alle tesi cartesiane: ciò che caratterizza un corpo come qualcosa di diverso dallo spazio è la sua impenetrabilità. Inoltre l'esistenza del tempo viene ricondotta a un fatto geometrico: c'è il tempo perché c'è il movimento; c'è il movimento perché cambia la collocazione spaziale di un corpo. L'uniformità del tempo viene ricondotta all'uniformità degli spazi percorsi durante il movimento.

2.3 La forza d'inerzia, la misura del tempo e la rappresentazione del movimento.

Veniamo ora al primo dei principi: l'inerzia. Qui D'Alembert fa appello a Newton: *forza d'inerzia* è la proprietà dei corpi di mantenere lo stato in cui si trovano; lo stato può essere a sua volta di *riposo* o di *movimento*. Da qui seguono due affermazioni:

(i) un corpo a riposo persiste nel suo stato, a meno che non intervenga una causa;

(ii) un corpo messo in movimento da una causa qualunque continua a muoversi di moto uniforme in linea retta, a meno che non intervenga una causa che ne modifichi lo stato.

Per Newton, così come per Galileo (che non viene minimamente citato), il principio d'inerzia è un fatto *sperimentale*. Per D'Alembert si tratta invece di un principio *deducibile da considerazioni puramente razionali*. Egli dimostra la validità del principio mediante un argomento di carattere geometrico, illustrato nel quadro 1 di *Fig. 4*.

Si fa ricorso alla ragione sufficiente. Non c'è ragione per ammettere che la materia abbia in sé stessa la capacità di modificare il proprio stato meccanico: la materia è indifferente al riposo o al movimento, dunque non può modificare la propria velocità o la propria direzione. Se un corpo si muove di moto uniforme sul segmento AB il suo stato nei punti

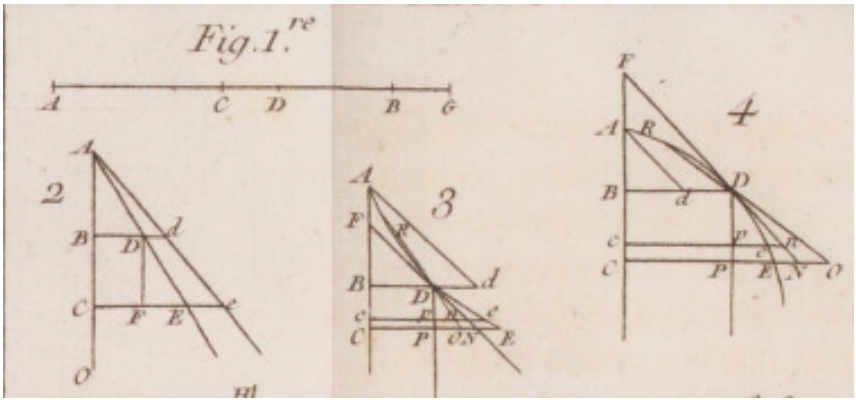


Fig. 4. Ad illustrazione del principio d'inerzia e delle relazioni tra tempo e movimento. Si noti che, contrariamente alle nostre abitudini, qui la coordinata spaziale è riportata sull'asse delle ascisse, il tempo sulle ordinate.

arbitrari C e D interni al segmento è necessariamente identico, perché potrebbe mutare solo per una capacità innata nel corpo stesso. Ora, se trovandosi in C esso può raggiungere il punto B muovendosi uniformemente, segue che trovandosi in D dovrà raggiungere un punto G, sulla stessa retta, tale che le distanze $|CB|$ e $|DG|$ siano eguali; e così di seguito. Ciò, sottolinea D'Alembert, indipendentemente dall'assumere che la causa che genera il movimento agisca istantaneamente in A o che la causa mantenga il movimento agendo con continuità e uniformità – ipotesi, quest'ultima, che egli non condivide.

Accettata l'esistenza del moto uniforme, si pone la questione della misura del tempo. Un confronto diretto tra gli intervalli di tempo è chiaramente impossibile: noi possiamo solo confrontare tra loro, e dunque misurare, gli spazi percorsi da un corpo in un determinato intervallo di tempo. Ne segue che lo strumento naturale per la misura del tempo è il moto uniforme. D'Alembert fa ricorso a una rappresentazione grafica, riportata in *Fig. 4* nel quadro 2. Sulla retta verticale si rappresentano degli intervalli di tempo, ad esempio AB o AC; gli spazi percorsi si rappresentano con segmenti orizzontali, ad esempio BD o CE. Il moto uniforme è rappresentato dalla retta passante per i punti $D,\ E$. I rapporti tra gli intervalli di tempo vengono ricondotti in tal modo a rapporti tra lunghezze di segmenti – ossia a una misura puramente geometrica. Questo è il modo più semplice di cui disponiamo.

Resta una domanda: come possiamo riconoscere se un moto sia o no uniforme? Qui il ricorso all'esperienza è inevitabile. Ad esempio, in qualche caso abbiamo buone ragioni per ritenere che l'effetto di un'azione acceleratrice o ritardante sia praticamente insensibile; oppure possiamo confrontare tra loro movimenti diversi descritti dalla stessa legge, o tali che gli spazi percorsi in eguali intervalli di tempo siano sensibilmente proporzionali tra loro. In pratica, pur non avendo la certezza dell'uniformità, possiamo pur sempre arrivare a una buona approssimazione.

La rappresentazione grafica del movimento consente anche di caratterizzarlo scrivendo delle equazioni per la velocità e l'accelerazione. Così, se nel quadro 2 di *Fig. 4* gli intervalli Bd e Ce sono nella stessa proporzione di BD e CE allora anche la retta passante per i punti $d,\ e$ descrive un moto uniforme. Nel caso di non uniformità si avrà una curva convessa per il moto accelerato (quadro 3), concava per il moto ritardato (quadro 4). La velocità viene caratterizzata ricorrendo alla retta tangente in un punto alla curva che rappresenta il movimento. Denotando con $\mathrm{d}e$ l'incremento infinitesimo dello spazio percorso nell'intervallo infinitesimo $\mathrm{d}t$ la velocità u è ricavata dalla relazione

$$\mathrm{d}e = u\,\mathrm{d}t\,. \tag{1}$$

La divisibilità degli intervalli spaziali e temporali giustifica l'operazione. Per l'accelerazione occorre considerare l'incremento dell'incremento dello spazio, denotato con $\mathrm{dd}e$, e si ottiene la relazione

$$\mathrm{dd}e = \varphi(e,t)\mathrm{d}t^2 \quad \text{ovvero} \quad \mathrm{d}u = \varphi(e,t)\mathrm{d}t\,, \tag{2}$$

dove $\varphi(e,t)$ è una funzione di spazio e tempo. Qui è necessario soffermarsi un momento. Una lettura ingenua ci indurrebbe a identificare l'ultima relazione con il principio della dinamica che nei nostri testi viene solitamente scritto nella forma $F = ma$ ovvero $F = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$ (con notazioni abituali che non richiedono spiegazioni). Ma non dobbiamo farci trarre in inganno dalla nostre abitudini. D'Alembert, che evidentemente si ispira ai metodi geometrici dei *Principia* di Newton ma rifiuta il concetto di forza, considera incrementi infinitesimi in un intervallino di tempo $\mathrm{d}t$, *pensato, quest'ultimo, come costante*. L'argomento di D'Alembert è svolto mediante sottili considerazioni geometriche sulle figure, ma direi che lo si può esprimere in modo per noi più leggibile come segue. Se nell'intervallino $\mathrm{d}t$ lo spazio percorso è $\mathrm{d}e$ la relazione (1) per la velocità è praticamente immediata. Per l'accelerazione occorre invece considerare due intervallini di tempo $\mathrm{d}t$ consecutivi ed eguali. Se $\mathrm{d}e$ e $\mathrm{d}e'$ sono gli spostamenti durante i

due intervalli si ricaveranno le velocità corrispondenti dalle relazioni $\mathrm{d}e = u\,\mathrm{d}t$ e $\mathrm{d}e' = u'\,\mathrm{d}t$. Di conseguenza l'incremento infinitesimo $\mathrm{d}u = u' - u$ della velocità dovrà soddisfare la relazione $(u' - u)\mathrm{d}t = \mathrm{d}e' - \mathrm{d}e = \mathrm{d}\mathrm{d}e$, introducendo così l'incremento dell'incremento dello spazio. Osservando che $\mathrm{d}\mathrm{d}e$ dipende dalla posizione iniziale e dal tempo ne risultano le due relazioni (2). Ma si deve ancora assegnare un significato a $\varphi(e,t)$.

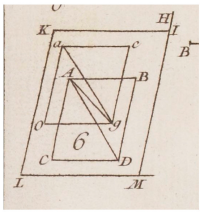
L'interpretazione corrente, dovuta a Newton e accettata ad esempio da Daniel Bernoulli (1700-1782) e Leonhard Euler (1707-1783), identifica $\varphi(e,t)$ con la forza. La critica di D'Alembert è che noi possiamo valutare la forza, nella migliore delle ipotesi, solo nel caso di contatto diretto tra i corpi (ad esempio misurandone l'impulso). Qualunque altra causa di movimento è *a priori* ignota, e si manifesta solo tramite i suoi effetti – ossia perché distrugge l'uniformità del moto. Vi sono solo due possibilità: se il movimento è noto, allora $\varphi(e,t)$ si calcola direttamente con un'operazione di derivazione, sicché le equazioni (2) *definiscono* la funzione $\varphi(e,t)$; se il movimento non è noto, allora la forma da dare alla funzione $\varphi(e,t)$ è materia di *pura ipotesi*, e si deve calcolare il movimento risolvendo le equazioni differenziali (2). Dunque $\varphi(e,t)$ rappresenta solo *"la quantité à laquelle l'accroissement de la vitesse est proportionel"*. Nel seguito del trattato il termine *forza* viene spesso usato, ma con la precisazione che si tratta solo di un'abbreviazione convenzionale che sostituisce la frase riportata qui sopra.

2.4 La composizione dei movimenti

L'enunciato della legge di composizione dei movimenti nella forma datagli da D'Alembert è riportato in *Fig. 5*. In forma per noi più abituale possiamo dire: *Gli spostamenti si compongono secondo la regola del parallelogramma*. Il teorema ha una serie di corollari, che mi limito a richiamare in quanto sono ormai conoscenza comune.

(i) La regola di composizione dei movimenti si applica anche alle velocità e alle forze acceleratrici, queste ultime intese nel senso precisato alla fine del paragrafo precedente.

(iii) Inversamente, si possono scomporre arbitrariamente movimenti, velocità o forza in componenti in modo da rispettare la regola del parallelogramma. Più in generale: si possono scomporre movimenti, velocità e forze acceleratrici in un numero arbitrario di componenti.



THÉOREME.

SI deux puiſſances quelconques agiſſent à la fois ſur un corps ou point A (Fig. 6.) *pour le mouvoir, l'une de* A *en* B *uniformément pendant un certain tems, l'autre de* A *en* C *uniformément pendant le même tems, & qu'on acheve le parallélogramme* A B D C; *je dis que le corps* A *parcourra la diagonale* A D *uniformément, dans le même tems qu'il eût parcouru* A B *ou* A C.

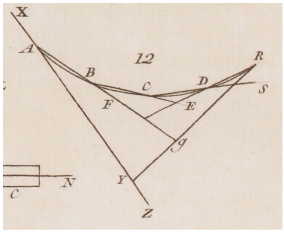
Fig. 5. L'enunciato della legge di composizione dei movimenti nel Traité de Dynamique.

2.5 L'azione dei vincoli e le leggi dell'urto

Fin qui si può dire che non vi siano grosse novità rispetto a quanto era noto – fatto salvo qualche aspetto della dimostrazione della regola del parallelogramma. Ma ora D'Alembert comincia a introdurre un elemento nuovo, che prelude alla trattazione dell'equilibrio.

Supponiamo che un corpo (noi diremmo: un punto materiale) sia vincolato a muoversi su una curva. Secondo il principio d'inerzia il corpo dovrebbe muoversi in linea retta; quindi il vincolo deve esercitare un'azione che modifichi la traiettoria, e l'azione (o forza acceleratrice) deve calcolarsi mediante le relazioni (2). Qui occorrono alcune considerazioni di carattere geometrico che riassumo in forma molto scarna. Si approssima un piccolo tratto di curva con un tratto di circonferenza e si mostra che la forza esercitata dal vincolo è proporzionale al quadrato della velocità, inversamente proporzionale al raggio della circonferenza, e diretta perpendicolarmente alla curva. Si tratta della formula a noi ben nota $a = v^2/r$ (con notazioni ovvie).

Il teorema enunciato da D'Alembert e riportato in *Fig. 6* afferma, in breve: *Se un corpo non è soggetto ad azioni diverse da quella del vincolo la sua velocità lungo la curva resta costante.* La dimostrazione è un po' laboriosa; anche qui si fa uso di metodi geometrici, approssimando la curva con una successione di segmenti che possono rendersi arbitrariamente piccoli (si veda il diagramma in *Fig. 6*). Verrebbe spontaneo chiedersi: perché non servirsi del calcolo degli infinitesimi, del resto noto a D'Alembert? La risposta la dà lui stesso: col metodo degli infinitesimi si mostra solo che la variazione di velocità è dell'ordine del quadrato della lunghezza dei segmenti; il metodo geometrico invece permette di con-



THÉOREME.

Si un corps mû ſuivant une droite X A (Fig. 12) *rencontre la ſurface courbe* A R, *touchée en* A *par* X A, *& ſur laquelle il ſoit obligé de ſe mouvoir; je dis qu'il ne perdra de* A *en* R *aucune partie de ſa viteſſe.*

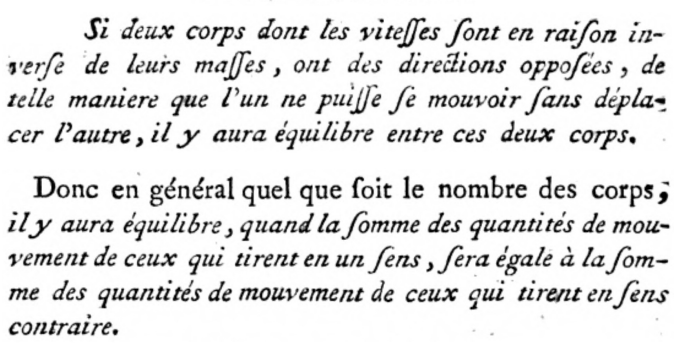
Fig. 6. Il moto di un corpo vincolato a una curva.

cludere che è davvero nulla. Evidentemente il calcolo differenziale non era ancora sufficientemente sviluppato.

La dimostrazione anticipa gli argomenti che troveremo nello studio degli equilibri. Nelle ipotesi dell'enunciato di *Fig. 6* possiamo distinguere due fasi: l'urto del corpo contro la curva seguito da un movimento lungo la curva stessa. L'idea guida è che all'atto del contatto del corpo con la curva si può scomporre la velocità in due componenti: una perpendicolare alla curva, l'altra tangente. Il vincolo imposto dalla curva distrugge la componente ortogonale, ma lascia invariata quella tangente, sicché il corpo prosegue lungo la curva stessa mantenendo la sola componente tangente della velocità. A partire da quell'istante si può scomporre la curva in archi arbitrariamente piccoli, così da potersi considerare segmenti, e agli estremi si procede ancora alla scomposizione della velocità; qui però la componente ortogonale è già nulla, perché il corpo ha velocità tangente alla curva. Ne segue che nessuna componente della velocità viene distrutta dal vincolo.

La prima parte del trattato si chiude con le leggi dell'urto anelastico, stabilite nell'enunciato di *Fig. 7*. L'ipotesi è che due corpi che si muovono in direzioni opposte si urtino, e dopo l'urto formino un unico corpo composto dai precedenti. Se le velocità iniziali dei due corpi sono inversamente proporzionali alle masse allora esse vengono distrutte, sicché il nuovo corpo composto resta in equilibrio.

La dimostrazione è abbastanza elaborata. Inizia col considerare due corpi di egual massa, aventi la stessa velocità. In tal caso l'equilibrio segue, ancora una volta, da un argomento di ragion sufficiente: non c'è ragione per cui il corpo composto possa muoversi trasversalmente alla direzione delle due velocità all'istante dell'urto, e non c'è ragione per cui una delle due velocità debba prevalere sull'altra. Abbiamo dunque una situazione analoga a quella dell'urto contro una curva: le velocità si distruggono a



THÉOREME.

Si deux corps dont les viteſſes ſont en raiſon inverſe de leurs maſſes, ont des directions oppoſées, de telle maniere que l'un ne puiſſe ſe mouvoir ſans déplacer l'autre, il y aura équilibre entre ces deux corps.

Donc en général quel que ſoit le nombre des corps; *il y aura équilibre, quand la ſomme des quantités de mouvement de ceux qui tirent en un ſens, ſera égale à la ſomme des quantités de mouvement de ceux qui tirent en ſens contraire.*

Fig. 7. Le leggi dell'urto anelastico.

vicenda. Stabilito questo, si passa a considerare il caso di un corpo che abbia massa multipla dell'altro. Supponiamo, ad esempio, che il primo corpo abbia massa doppia del secondo. Allora lo si può considerare come composto da due corpi di egual massa con velocità eguali, che si sommano per composizione. Perché queste vengano annullate dalla velocità del secondo corpo occorre che ciascuno di essi abbia una velocità pari alla metà di quella del secondo. In altri termini, devono eguagliarsi le *quantità di moto*. Con un argomento simile si tratta il caso di un rapporto razionale tra le masse, e lo si estende al caso di masse incommensurabili. Infine, sempre per composizione di velocità, o meglio di quantità di moto, si trova la condizione di equilibrio per un numero qualunque di masse.

2.6 La dinamica

La seconda parte del *Traité de dynamique* entra nel vivo del problema della dinamica: molto breve (nella prima edizione), ma qui sta il contributo più rilevante di D'Alembert.

La discussione inizia osservando che noi conosciamo tre tipi di azioni reciproche tra corpi: (i) impulso diretto, ad esempio con l'urto; (ii) azione mediata da altri corpi, quali carrucole, fili, aste, leve &c; (iii) azione reciproca, ad esempio la gravitazione. I primi due tipi comprendono la classe dei *sistemi vincolati*, proprio quelli che si rivelavano più difficili da descrivere in termini geometrici. Su quelli si concentra la discussione successiva, in quanto il caso della gravitazione è già stato ampiamente studiato, oltre che da Newton, anche da Bernoulli, Eulero e altri.

PROBLÊME GÉNÉRAL.

Soit donné un ſyſtême de corps diſpoſés les uns par rapport aux autres d'une maniere quelconque ; & ſuppoſons qu'on imprime à chacun de ces Corps un Mouvement particulier, qu'il ne puiſſe ſuivre à cauſe de l'action des autres Corps ; trouver le Mouvement que chaque Corps doit prendre.

De là réſulte le principe ſuivant, pour trouver le mouvement de pluſieurs corps qui agiſſent les uns ſur les autres. *Décompoſés les mouvemens a, b, c,* &c. *imprimés à chaque corps, chacun en deux autres* a, α ; b, ϛ ; c, κ ; &c. *qui ſoient tels, que ſi l'on n'eût imprimé aux corps que les mouvemens* a, b, c &c. *ils euſſent pû conſerver ces mouvemens ſans ſe nuire réciproquement ; & que ſi on ne leur eût imprimé que les mouvemens* α, ϛ, κ, &c. *le ſyſtême fût demeuré en repos ;* il eſt clair que a, b, c ſeront les mouvemens que ces corps prendront en vertu de leur action. *Ce qu'il falloit trouver.*

Fig. 8. L'enunciato del problema della dinamica in forma generale e il metodo per risolverlo.

Il problema si enuncia brevemente come segue: *Studiare il movimento di un sistema di corpi tra loro vincolati, ciascuno dei quali è sottoposto a un'azione (forza) di intensità e direzione arbitraria.*

Nell'affrontare questo problema D'Alembert propone il suo principio generale per trattare i problemi della dinamica. Si trova anzitutto la velocità (o la variazione di velocità) indotta dall'azione esercitata su ciascuno dei corpi; denotiamo queste quantità con $a, b, \ldots$ che sono note. Ora teniamo conto dei vincoli: scomponiamo ciascuna velocità in due componenti $a = \mathtt{a} + \alpha$, $b = \mathtt{b} + \beta$ e così via, con la prescrizione che $\alpha, \beta, \ldots$ siano le componenti che vengono annullate dai vincoli, e $\mathtt{a}, \mathtt{b}, \ldots$ siano compatibili con i vincoli stessi nel senso che se ai vari corpi venissero applicate solo le velocità $\mathtt{a}, \mathtt{b}, \ldots$ allora tutto il sistema si muoverebbe come se non fosse soggetto a vincoli, e questo risolve il problema. Il fatto rilevante è che *il problema della dinamica viene ricondotto a quello della statica*. Qui è bene soffermarsi un momento.

Nel caso della statica il problema è la ricerca di un equilibrio sotto le azioni (o forze) esercitate sui corpi. Lo schema seguito nella prima parte del trattato si riassume in tre punti.

- Il corpo è inizialmente fermo;
- l'impulso gli comunica una velocità a, che si scompone in $a = \mathtt{a} + \alpha$ col criterio descritto sopra;
- l'equilibrio si mantiene se $\mathtt{a} = 0$.

Nel caso della dinamica si ripete lo stesso schema, opportunamente modificato.

- Il corpo è inizialmente in moto con una velocità data, compatibile con il vincolo;
- l'impulso gli comunica un *incremento* di velocità a, che si scompone in $a = \mathtt{a} + \alpha$ con lo stesso criterio usato per la statica;
- l'incremento effettivo di velocità è solo $\mathtt{a}$.

In ambedue i casi l'incremento $\mathtt{a}$ di velocità si trova annullando la componente α dell'impulso equilibrata dal vincolo. Per ottenere l'equilibrio si chiede anche $\mathtt{a} = 0$. Tutto questo si applica singolarmente a ciascuno dei corpi costituenti il sistema.

2.7 La seconda edizione, 1758

Il *Traité de dynamique* vede una seconda edizione a 15 anni di distanza dalla prima. Si tratta, lo dice l'autore stesso, di una versione aumentata di oltre un terzo. In effetti basta un rapido conteggio delle pagine per rendersene conto: si passa dalle 186 della prima edizione alle 278 della seconda. Ancor più significativo è il confronto tra gli indici delle due edizioni. La prima parte è praticamente invariata; l'indice della seconda parte, in *Fig. 7*, è considerevolmente più lungo.

Le sezioni riguardanti i principi, contenute nella prima parte e nei primi due capitoli della seconda parte, sono sostanzialmente invariate rispetto alla prima edizione. Le differenze emergono nel seguito, e riguardano le applicazioni dei principi a una serie di problemi che l'autore ha studiato nel corso degli anni. Il cap. III della seconda parte riguarda il problema di corpi che interagiscono mediante fili o verghe, quello di corpi solidi poggianti su un piano, oppure casi di urto tra cui si include anche il caso elastico. Il cap. IV è quello ampliato in modo più considerevole. Vi si discute il Principio delle Forze Vive, quello che per noi è il teorema dell'energia cinetica: lo si dimostra sulla base dei principi, e se ne danno diverse applicazioni, comprendendo anche il caso dei fluidi.

SECONDE PARTIE.

CHAPITRE I. *Exposition du Principe.* page 72
CHAP. II. *Propriétés du centre de gravité commun de plusieurs Corps, déduites du Principe précédent.* p. 75
CHAP. III. *Problêmes où l'on montre l'usage du Principe précédent.* p. 96
§. I. *Des Corps qui se tiennent par des fils ou par des verges.* ibid.
§. II. *Des Corps qui vacillent sur des plans.* p. 186
§. III. *Des Corps qui agissent les uns sur les autres par des fils, le long desquels ils peuvent couler librement.* p. 200
§. IV. *Des Corps qui se poussent ou qui se choquent.* p. 211
D'un Corps qui en choque plusieurs autres à la fois. p. 227
Du choc des Corps à ressort qui se rencontrent plusieurs à la fois. p. 235
CHAP. IV. *Du Principe de la conservation des forces vives.* p. 252
De la conservation des forces vives dans les Corps qui se tiennent par des fils ou par des verges inflexibles. p. 254
De la conservation des forces vives quand les Corps, regardés comme des points, se tiennent par des fils. p. 259
De la conservation des forces vives quand les Corps se tiennent par des verges inflexibles, & qu'on les regarde comme des points. p. 261
De la conservation des forces vives quand les Corps sont de masses finies, & qu'ils se tiennent par des fils ou par des verges inflexibles. p. 262
De la conservation des forces vives dans le choc des Corps élastiques. p. 264
De la conservation des forces vives dans les fluides. p. 269

Fin de la Table des Titres.

Fig. 9. L'indice della seconda parte del Traité de dynamique nella seconda edizione, 1758.

D'Alembert non manca di elencare alcuni temi, già trattati in pubblicazioni precedenti, che ha rinunciato a includere: il moto di rotazione di un solido attorno a un asse, che è interessante anche per la precessione degli equinozi; il problema del moto e delle oscillazioni di un corpo in un un fluido; una nuova dimostrazione del principio di composizione delle forze. Spicca in particolare il riferimento al problema delle vibrazioni di una corda, di ovvio interesse per gli strumenti musicali. Ancora una volta l'autore non risparmia una frecciata ai contemporanei: quello che è rimasto un progetto non inserito nel trattato è *"un écrit assez étendu sur les vibrations des cordes sonores, en réponse aux objections qui m'ont été faites sur ce sujet dans les* Mémoires de l'Académie de Berlin *de 1753, par deux grands géometres, M*rs *Bernoulli & Euler, divisés d'ailleurs entre eux, même dans ce qu'ils me contestent, puisque l'un m'accorde ce que l'autre me nie."* La frase lascia trasparire le accese discussioni in corso, in quel periodo, sul modo di trattare il problema; una questione brillantemente risolta nel 1762 da Lagrange [9].

3. La statica e la dinamica dei fluidi

Il volume della *Dynamique* ha come continuazione naturale il *Traité de l'equilibre et du muvement des fluides*, un trattato di 458 pagine, oltre a 32 di *Préface*. Ne parlo molto brevemente: il contenuto è troppo vasto, ed è ben difficile ridurlo a poche pagine. Si deve anche osservare che l'influsso di quel trattato sugli sviluppi successivi della fluidodinamica non è paragonabile a quello della *Dynamique* sulla Meccanica.

Il desiderio di D'Alembert sarebbe fondare anche la Meccanica dei fluidi su basi puramente razionali. A tal fine, dice, potremmo considerare un fluido come composto da un gran numero di piccoli corpi che interagiscono tra loro secondo le regole sviluppate nella *Dynamique*. In tal modo la teoria dei fluidi ci darebbe lo stesso grado di certezza di quella della dinamica, essendo fondata sugli stessi principi metafisici che stanno alla base della dinamica dei corpi. Ma qui è costretto ad ammettere, suo malgrado, che si tratta di un progetto irrealizzabile: noi ignoriamo i dettagli sulla forma e disposizione delle particelle nel fluido e sulle interazioni reciproche. Così diventa indispensabile ricorrere all'esperienza, accettandone tutti i limiti. L'obiettivo diventa isolare i principi minimi indispensabili per la costruzione della teoria.

Loix générales de l'équilibre dans un Fluide dont les parties ſont animées par des Peſanteurs quelconques.

THEORÊME I.

1. *SI un vaſe de figure quelconque* A B C (Fig. 1), *eſt entiérement rempli par un Fluide, & qu'ayant fait à ce vaſe un petit trou* A, *l'on preſſe en cet endroit la ſurface du Fluide, la preſſion ſe répandra également en tout ſens & dans toutes les parties du Fluide. de maniére que tous les points* E, D, &c. *du vaſe ſeront preſſés ſuivant les lignes* D F, E G, *perpendiculaires à la ſurface* A B C, *avec une force égale à la force qui preſſe en* A.

Cette propoſition doit être regardée comme un Principe d'Expérience, dont tout le monde convient : & la proprieté des Fluides dont il s'agit ici, eſt ce que nous connoiſſons de plus certain ſur leur nature.

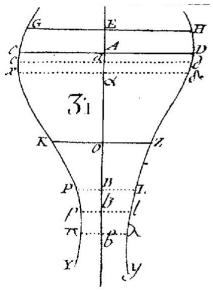
Fig. 10. Il principio su cui si fonda la statica dei fluidi.

3.1 La statica dei fluidi

Il libro primo del trattato, per un totale di 68 pagine, è dedicato alla statica. Oltre ai principi enunciati nella *Dynamique,* D'Alembert pone come fondamento il principio che troviamo enunciato in *Fig. 10: la pressione esercitata in un punto del fluido si distribuisce uniformemente in ogni punto interno al fluido e in ogni direzione.* Si tratta di un principio accettato come *fatto sperimentale*. Segue un elenco di problemi trattati nei vari capitoli. Ne richiamo alcuni: (a) la pressione sulle pareti di un vaso è ortogonale in ogni punto alla superficie; (b) l'equilibrio di un fluido pesante, che include anche il caso di vasi comunicanti; (c) l'equilibrio di solidi inmmersi in un fluido; (d) la variazione della pressione con la profondità in un liquido pesante; (e) il caso di fluidi non omogenei; (f) l'equilibrio di fluidi con superficie curva, interessante per capire la forma dei corpi celesti; (g) il caso di fluidi comprimibili.

3.2 La dinamica dei fluidi

Il problema della dinamica è trattato nel secondo libro, ben più esteso del primo: 125 pagine. D'Alembert, nel primo capitolo, pone dei principi generali. L'enunciato del primo principio è riportato in *Fig. 11*. A



Principes généraux pour trouver le mouvement d'un Fluide renfermé dans un vaſe de figure quelconque.

THEORÊME I.

83. *SI un Fluide* DCPL, (Fig. 31) *indéfini ou non, coule de* A *vers* B *dans un vaſe de figure quelconque* HGYy, *& qu'on diviſe le Fluide en tranches* CD, KZ, PL *perpendiculaires à* AB, *je dis que la viteſſe de chaque tranche ſera en raiſon inverſe de ſa largeur, c'eſt-à-dire, que la viteſſe en* CD, *par exemple, ſera à la viteſſe en* PL, *comme* PL *eſt à* CD.

Fig. 11. Il principio su cui si fonda la dinamica dei fluidi.

questo fa seguire un secondo enunciato, riportato in *Fig. 12*, che consiste nell'applicazione del principio generale della Dinamica al caso dei fluidi.

Il secondo capitolo è dedicato a una serie di problemi relativi alla dinamica dei fluidi incomprimibili in vasi a pareti rigide, prendendo in considerazione l'assenza o la presenza di peso, il flusso attraverso aperture praticate nelle pareti, il caso di flusso continuo e quello della separazione del fluido in diverse parti, in cui entra in causa il fenomeno dell'aderenza tra le particelle del fluido.

Più interessante è il capitolo terzo, dedicato al confronto con gli studi precedenti di Mac Laurin e di Jean Bernoulli (1667-1748). A tal fine D'Alembert espone brevemente le loro tesi, poi dedica diverse pagine a un commento critico. Sarebbe interessante sviluppare più in profondità questo argomento, ma ciò richiederebbe uno spazio alquanto ampio.

Nel capitolo quarto D'Alembert passa a considerare la dinamica dei fluidi comprimibili in vasi o tubi rigidi. Le ultime pagine del capitolo contengono una breve discussione del problema della propagazione del suono. Dopo un breve richiamo alle teorie di Newton e di Eulero, che peraltro conducono a risultati diversi, il centro della discussione diventa la teoria di di Jean Bernoulli figlio (1710-1790). L'atteggiamento di D'Alembert è alquanto critico: egli considera la teoria di Bernoulli come sostanzialmente priva di giustificazioni. Non si parla qui delle ricerche sulla corda vibrante svolte da D'Alembert stesso, ma presentate qualche anno dopo la pubblicazione del trattato sui fluidi [7].

Infine, il terzo libro del trattato affronta l'argomento ben più complesso della resistenza dei fluidi al movimento dei corpi.

THEORÊME II.

84. *Les mêmes ſuppoſitions étant faites que dans le Theorême précedent, ſoient en général les viteſſes des différentes tranches du Fluide dans un même inſtant, repréſentées par l'indéterminée* v. *Imaginons que* d v *ſoit l'incrément de* v *dans l'inſtant ſuivant, cette quantité* d v *étant différente pour les différentes tranches, poſitive pour les unes, & négative pour les autres ; en un mot, que* $v \mp dv$, *exprime la viteſſe de chaque tranche lorſqu'elle prend la place de celle qui eſt immédiatement au-deſſous ; je dis que ſi chaque tranche étoit ſuppoſée tendre à ſe mouvoir avec la ſeule viteſſe infiniment petite* $\pm dv$, *le Fluide reſteroit en équilibre.*

Fig. 12. L'applicazione del principio della Dinamica al caso dei fluidi.

4. Le opere di Astronomia

I tre volumi delle *Recherches sur differens points importans du Système du Monde* sono dedicati alla discussione di problemi di astronomia, e rappresentano solo una parte delle ricerche svolte da D'Alembert, in quanto affiancano e in parte riassumono o aggiornano il contenuto di diverse memorie. Il lavoro di D'Alembert in questo campo è considerevole, soprattutto se si tiene conto delle difficoltà tecniche dovute alla lunghezza e alla complessità dei calcoli richiesti. Qui mi limiterò a richiamare tre argomenti particolarmente studiati a quel tempo, e rimasti oggetto di lunghe indagini anche in tempi successivi.

(i) Il moto di precessione degli equinozi e di nutazione dell'asse terrestre, connesso col problema della forma della Terra.
(ii) Il moto della Luna.
(iii) Le perturbazioni dei moti planetari.

La discussione che segue è necessariamente sintetica: per un'esposizione esauriente occorrerebbero ore e ore – e non basterebbe un intero libro. Vale comunque un'osservazione di carattere generale. Come nel caso della Meccanica, le idee sviluppate da D'Alembert hanno talvolta fatto scuola sul modo di impostare i problemi. Non così invece per l'aspetto tecnico: i metodi analitici sviluppati qualche decennio dopo da Lagrange hanno ridotto in modo sostanziale le difficoltà del calcolo, e hanno soppiantato quelli di D'Alembert.

4.1 Il contesto storico

Già l'Astronomia antica si era occupata delle irregolarità dei moti planetari, solitamente chiamati *ineguaglianze* (traduco così il termine latino *inæqualitas*, inteso come mancanza di uniformità). Qui è necessaria una premessa, seguita dal riassunto sintetico di alcuni fatti.

Il lettore osserverà che nel paragrafo vi sono molte indicazioni quantitative: il ciclo delle eclissi valutato in 18,6 anni; la precessione degli equinozi di circa 50″ all'anno e periodo circa 26000 anni e così via. Comprendere il lavoro di Newton e dei suoi successori evitando dati tecnici di quel genere è praticamente impossibile. Viene però spontaneo chiedersi come si possano misurare con precisione archi così piccoli o periodi così lunghi. Ho raccolto in appendice A una serie di informazioni che possono essere d'aiuto per un lettore non particolarmente esperto di Astronomia; un lettore esperto dovrebbe semplicemente ignorare l'appendice.

Veniamo ai fatti. Nel sistema geocentrico generalmente adottato dall'Astronomia antica e codificato da Tolomeo le orbite dei Pianeti vengono descritte mediante cerchi, eccentrici, epicicli (equivalenti alle nostre serie di Fourier) ed equanti. Tutto quell'armamentario geometrico era necessario per descrivere le irregolarità o ineguaglianze note: la non uniformità nel tempo del moto intorno alla Terra; le variazioni del diametro apparente del Sole e della Luna; le variazioni della luminostà dei Pianeti; la maggior durata della stagione estiva rispetto a quella invernale (nell'emisfero nord); le variazioni in latitudine; i moti retrogradi dei Pianeti. Questi fenomeni trovano una spiegazione soddisfacente nell'ambito del sistema eliocentrico come elaborato da Copernico, difeso da Galileo e accettato da Keplero e Newton.

Il modello Kepleriano, almeno nelle intenzioni, rimuove tutto l'armamentario geometrico di Tolomeo e Copernico e lo sostituisce con le ellissi. Ma la perfezione di quel modello si rivela ben presto illusoria: è un'approssimazione molto elegante della realtà, ma solo un'approssimazione. Lo stesso Keplero si accorge che restano delle ineguaglianze che il suo modello non riesce a descrivere; egli stesso conia il termine *equazioni secolari* che nelle sue intenzioni dovrebbero tener conto della irregolarità osservate, ma lascia ai posteri il compito di determinare quelle equazioni.

Alle ineguaglianze osservate da Keplero si aggiungono altri fenomeni: alcuni noti da tempo quali il ciclo delle eclissi e la precessione degli equinozi; altri frutto di nuove scoperte dovute anche alla disponibilità di strumenti di osservazione sempre più precisi e potenti. Il problema che

si pone nella prima metà del secolo XVIII è se la teoria della gravitazione proposta da Newton possa rendere conto complessivamente di tutti quei fenomeni.

Torniamo all'opera di D'Alembert. Si deve tener conto che nella prima metà del XVIII secolo la teoria di Newton non era universalmente accettata. I principali antagonisti di D'Alembert in quegli anni erano Eulero a Berlino e Clairaut a Parigi. Eulero accettò la teoria newtoniana dopo qualche esitazione. Alexis Clairaut (1713-1765), egli pure membro dell'Académie, almeno in un primo tempo sostenne apertamente la tesi che la legge della gravitazione di Newton non fosse esatta, e che vi si dovessero apportare delle correzioni; proponeva di aggiungere alla forza termini dipendenti inversamente da potenze della distanza superiori a due (si veda [1], pag. 338). Per inciso, non sembra che i rapporti tra D'Alembert e Clairaut andassero al di là del reciproco rispetto che faceva da schermo a una mal dissimulata rivalità.

D'Alembert si schiera con i sostenitori di Newton, rifiutando le tesi cartesiane, ma per farlo intende sviluppare metodi di calcolo che forniscano risultati il più esatti possibile: egli ha ben presente il fatto che la prova della correttezza della teoria newtoniana sta nel rendere conto di tutti i fenomeni astronomici noti. A tal fine espone in modo dettagliato la teoria di Newton, ove disponibile, pur senza risparmiare le critiche; poi passa ad esporre le teorie che lui stesso ha elaborato. La conclusione finale è totalmente a favore di Newton, e dunque contraria a Cartesio (a cui peraltro dedica ben poco spazio, e solo per dire che si tratta di una teoria in fase di estinzione).

4.2 La precessione degli equinozi e la nutazione dell'asse terrestre

Il fenomeno della *precessione degli equinozi* è stato scoperto da Ipparco di Nicea, intorno al 150 aC. Egli notò una differenza sistematica tra le sue misure delle longitudini delle stelle e i dati tramandati nelle tavole di astronomi dei due secoli precedenti, e la attribuì a uno spostamento regolare del punto equinoziale dell'orbita del Sole, valutato da lui in circa $48''$ all'anno.[1] In altre parole, Ipparco introduce l'ipotesi che l'intero cielo delle stelle fisse ruoti molto lentamente da occidente verso oriente attorno alla perpendicolare all'eclittica; ciò è del tutto coerente con l'ipotesi

[1] L'arco è molto piccolo inosservabile a occhio nudo, ma in un paio di secoli lo spostamento totale ammonta a circa 2 gradi e mezzo: una quantità ben osservabile visualmente perché corrisponde a circa 5 volte il diametro apparente della Luna.

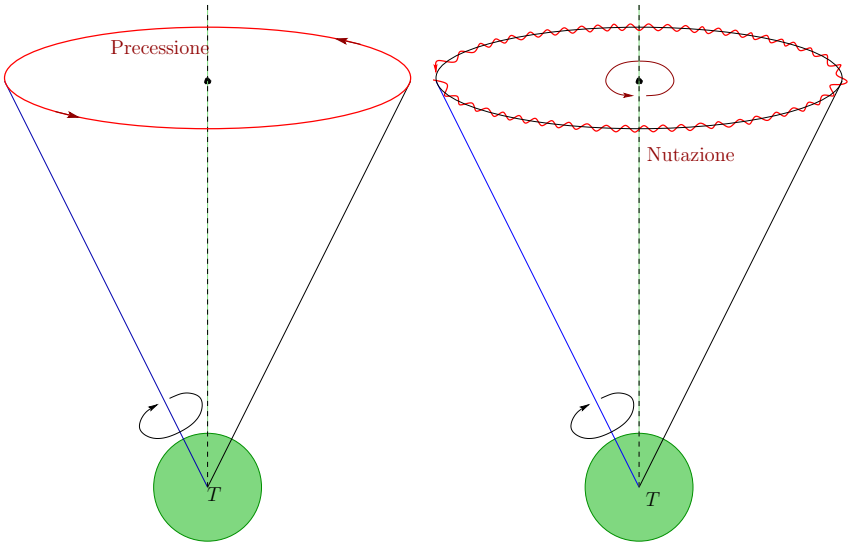


Fig. 13. I moti di precessione e di nutazione dell'asse terrestre.

geocentrica, secondo la quale la Terra è fissa. Una volta accettato il sistema eliocentrico, e quindi il movimento della Terra, il fenomeno viene spiegato ammettendo che le stelle restino fisse, e che l'asse di rotazione della Terra descriva una superficie conica attorno all'asse perpendicolare all'eclittica girando in senso contrario alla rotazione della Terra, come rappresentato nel quadro sinistro di *Fig. 13*. I dati astronomici disponibili a quei tempi stimavano la velocità in circa $50''$ all'anno, corrispondenti a un periodo di circa 26000 anni; una stima non troppo diversa da quella di Ipparco.

Il fenomeno della *nutazione*, scoperto da James Bradley (1693-1762) e comunicato nel 1747 al termine di un periodo ventennale di osservazioni che copre un'intera rivoluzione del nodo lunare, consiste in una oscillazione dell'inclinazione dell'asse terrestre intorno al valore medio di circa $23°30'$, come rappresentato nel quadro destro di *Fig. 13*. Secondo la descrizione di Bradley il polo terrestre descrive una piccola ellisse intorno alla sua posizione media dovuta alla precessione; egli valuta gli assi dell'ellisse rispettivamente in $18''$ e $16''$, e il periodo coincide con quello della rivoluzione del nodo lunare, pari a circa 18,6 anni. La comunicazione originale è pubblicata in [1]. Qui la quantità osservata è decisamente piccola: le misure di Bradley sono state effettuate mediante gli strumenti

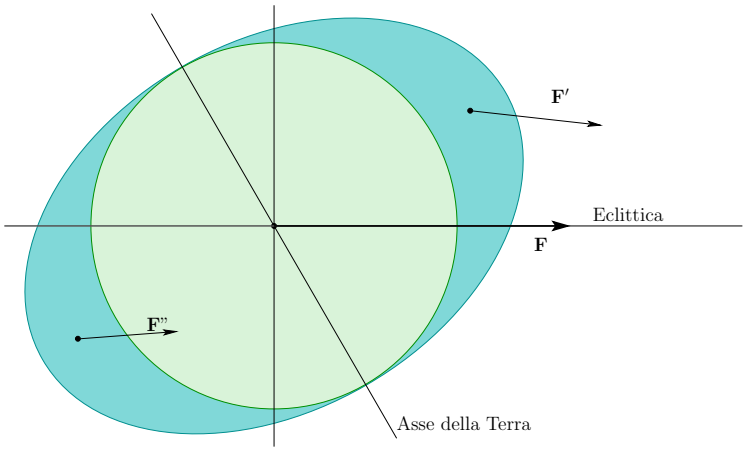


Fig. 14. L'azione gravitazionale del Sole sulla Terra, rappresentata come uno sferoide schiacciato schematizzato in Fig. 14. La parte sferica centrale, essendo simmetrica, non comporta nessuna azione sulla direzione dell'asse: ciò è stato dimostrato da Newton. La parte che eccede la forma sferica, qui rappresentata dalle due lunette, è rilevante: la composizione delle forze rappresentate non è nulla a causa della differenza nella distanza delle lunette dal Sole. Ne risulta un'azione che tende a raddrizzare l'asse. Per la Luna valgono considerazioni simili, a cui si aggiunge l'inclinazione dell'orbita lunare che introduce una dipendenza periodica della forza dal tempo.

più sofisticati a sua disposizione, in particolare il telescopio da lui stesso costruito.

In termini meccanici si inquadra il problema nell'ambito della dinamica del *corpo rigido*, che oggi viene affrontato partendo dalle equazioni di Eulero, pubblicate dopo i trattati di D'Alembert. Occorre tener conto delle forze esercitate dal Sole e dalla Luna: D'Alembert porta degli argomenti a favore della tesi che le eventuali azioni di altri Pianeti, ad esempio Giove, siano troppo piccole per essere realmente influenti.

Il primo tentativo di spiegare in termini meccanici il fenomeno della precessione è dovuto a Newton, il cui lavoro viene illustrato da D'Alembert in modo dettagliato. Le cause fisiche vengono identificate nell'azione gravitazionale del Sole e della Luna sulla Terra, e nella forma particolare di quest'ultima. Se la Terra fosse una sfera perfetta, formata da strati sferici omogenei, allora l'azione gravitazionale sarebbe perfetta-

mente simmetrica e potrebbe ricondursi a quella agente su un punto. A rigore, questo sarebbe vero se anche il Sole e la Luna avessero la stessa struttura a strati sferici omogenei, ipotesi tacitamente ammessa. In realtà la Terra è uno sferoide schiacciato ai poli che ruota intorno a un asse inclinato rispetto all'eclittica; ciò introduce una asimmetria nell'azione gravitazionale degli altri corpi, con una tendenza a diminuire l'inclinazione dell'asse di rotazione. Ne risulta un effetto giroscopico, per cui l'asse della Terra ruota intorno all'asse dell'eclittica. Il fenomeno è del tutto analogo al moto di precessione della trottola quando il suo asse di rotazione risulta inclinato rispetto alla verticale.

La difficoltà è duplice. Dal punto di vista matematico occorre calcolare la risultante dell'azione gravitazionale sulla parte eccedente la sfera, come rappresentata in *Fig. 14*: il calcolo integrale non era ancora sviluppato a sufficienza. Dal punto di vista fisico il problema è la forma della Terra e la sua struttura: non c'erano dati certi né sulla composizione interna né sullo schiacciamento effettivo; quest'ultimo era stato valutato misurando la lunghezza del grado di meridiano in diversi punti del globo – il metodo ideato da Eratostene.

La via d'uscita escogitata da Newton consiste nel sostituire allo sferoide una sfera omogenea, almeno a strati, circondata da un anello omogeneo disposto intorno all'equatore. In tal modo la sfera centrale può ridursi a un punto, e l'anello viene discretizzato, come composto da tante piccole lune. Ciò gli consente di calcolare la forza senza ricorrere al calcolo integrale. Valutando in tal modo sia l'azione del Sole che quella della Luna Newton trova una precessione di circa $50''$ all'anno, in buon accordo con le osservazioni. Ma qui D'Alembert assume un atteggiamento molto critico: *"Une conformité si exacte entre le calcul et le Phénomène, paroit sans doute une des proeuves les plus favorables au système de l'Attraction. Mais le conséquences qui en résultent perdront de leur force, si quelques-unes des propositions qui servent de base à la Théorie de M. Newton sont, ou douteuses, ou peu exactes. J'oserois dire que j'ai tout lieu de le croire, si je ne savois avec quelle retenue, & pour ainsi dire, avec quelle superstition on doit juger les grands hommes"*. Tra le ipotesi di Newton vi sono certamente l'omogeneità della Terra e la stima dello schiacciamento, per il quale assume una differenza di $\frac{1}{230}$ tra gli assi; inoltre egli assegna il valore 4:1 al rapporto tra le forze esercitate dalla Luna e dal Sole. D'Alembert osserva che le misure più recenti danno una differenza di $\frac{1}{178}$ tra gli assi, mentre Bernoulli stima in 5:2 il rapporto tra le forze di Luna e Sole. I risultati del calcolo sono ben diversi. Insomma, per dirla in breve, D'Alembert la-

scia affiorare il sospetto che Newton abbia aggiustato i parametri per far tornare il risultato, dopodiché in qualche modo lo assolve: *"D'ailleurs, est il surprenant qu'un Philosophe auquel nous devons un si grand nombre de découvertes, ait il laissé quelques pas à faire dans la carrière immense où il a tant avancé?"*

Quanto alla nutazione, il precedente è costituito dalla teoria sviluppata da Bradley sulla base di tavole fornitegli da John Machin (1686-1751), ma apparentemente non pubblicate. Del resto Bradley comunica i risultati delle sue osservazioni e traccia le linee di una teoria, ma senza svilupparla in modo completo.

Le difficoltà principali sono due. La prima è che sarebbe necessario separare in qualche modo l'azione del Sole da quella della Luna – operazione tentata da Newton confrontando gli effetti di marea. La seconda, a cui ho già accennato, è che un calcolo attendibile delle azioni gravitazionali del Sole e della Luna non può prescindere dalla conoscenza della forma e della struttura interna della Terra – informazioni non disponibili o poco attendibili.

Il primo problema è in qualche modo superabile, perché la nutazione è dovuta alla sola azione della Luna; ciò è confermato dalle osservazioni, perché il periodo della nutazione coincide con quello della rivoluzione del nodo lunare. In tal modo si può valutare il rapporto tra le due azioni, che risulta essere indipendente dalle ipotesi sulla struttura interna della Terra. D'Alembert valuta quel rapporto in $7/3$.

Il secondo problema è decisamente più complesso. Le ipotesi sulla struttura interna della Terra, fa notare D'Alembert, possono diventare infinite. Egli assume che la Terra sia formata da una serie di strati ellittici omogenei, e svolge un calcolo decisamente complesso: gli strumenti puramente geometrici e il continuo ricorso alla scomposizione delle varie azioni qui giocano un ruolo di primo piano, rendendo l'esposizione alquanto ostica per chi, come noi, abbia assimilato i metodi analitici inaugurati da Eulero e Lagrange e abbia perso familiarità con la geometria della riga e del compasso. Una volta calcolati separatamente i due movimenti egli cerca di determinare la densità, la forma e lo schiacciamento dei vari strati della Terra, analizzando diverse ipotesi e cercando l'accordo con le osservazioni. Qui emergono alcune curiosità; ne segnalo una. Assumendo che i vari strati della Terra siano solidi, egli conclude che per giustificare i $50''$ all'anno della precessione lo schiacciamento dovrebbe essere di molto inferiore a quello osservato. Trova invece un accordo sensibilmente migliore assumendo che la Terra abbia un nucleo solido circondato

da uno strato fluido. Più interessante è il fatto che si riesca a trovare un buon accordo anche con l'entità della nutazione. Come ho detto, Bradley parla di una piccola ellisse con assi rispettivamente di 18″ e 16″, ma segnala che mentre l'oscillazione di 18″ rispetto all'inclinazione media è ben stabilita dalle osservazioni, la stima di 16″ per l'asse minore non è altrettanto certa; proprio qui sollecita l'intervento del calcolo teorico, senza svolgerlo. D'Alembert giustifica i 18″ dell'asse maggiore, e calcola un rapporto 3/4 per l'asse minore, corrispondente a circa 12″; una piccola differenza compatibile con la precisione degli strumenti dell'epoca.

4.3 Il moto della Luna

Storicamente la teoria del moto della Luna ha sempre richiesto una trattazione separata rispetto a quella dei moti planetari. Il suo moto presenta diverse *ineguaglianze*, e il calcolo teorico della sua orbita è tutt'altro che agevole. D'altra parte gli sviluppi della teoria nei due secoli successivi sono tali e tanti che i metodi di D'Alembert possono considerarsi ampiamente superati.

Le ricerche di D'Alembert sono esposte nella prima parte, volume primo delle *Recherches sur le Système du Monde*. Le ineguaglianze da giustificare sono segnalate nell'opera di Newton, e i dati osservativi sono essenzialmente quelli di Tycho Brahe.

i. La *variazione*, scoperta da Tycho Brahe: il moto in longitudine della Luna non è uniforme, ma è soggetto a variazioni periodiche che arrivano fino a 35′ agli ottanti; una differenza pari al diametro apparente della Luna, e quindi ben osservabile.
ii. Il moto retrogrado dei nodi: il piano dell'orbita lunare è inclinato mediamente di poco più 5° rispetto all'eclittica, ma è soggetto a un movimento retrogrado di precessione: il nodo (l'intersezione tra il piano dell'eclittica e quello dell'orbita lunare) compie una rotazione di un angolo giro in circa 223 lunazioni, ovvero in 18,6 anni, corrispondente a circa 19 gradi in un anno. Si tratta del *periodo draconico, o draconitico*, già noto agli astronomi babilonesi.
iii. L'ineguaglianza nel moto dei nodi: la precessione non è uniforme; si hanno deviazioni di circa 1° 30′.
iv. Le oscillazioni dell'inclinazione: l'inclinazione dell'orbita lunare, che come ho già detto è in media poco più di 5°, è soggetta a un'oscillazione periodica di circa 8′.
v. La precessione dell'apogeo: la linea degli apsidi della Luna compie una rivoluzione di un angolo giro in poco meno di 9 anni.

Anche qui D'Alembert si propone di sviluppare una teoria più rigorosa rispetto a quella di Newton, che egli giudica insufficiente – pur sempre moderando le sue critiche con un elogio a quel grande uomo che merita tutta l'ammirazione dovuta a un maestro.

Lo schema seguito da D'Alembert non differisce sostanzialmente da quello adottato dal suo contemporaneo (e concorrente) Clairaut. Si tratta di calcolare l'orbita della Luna sotto l'azione gravitazionale della Terra e del Sole. In altre parole, è il *problema dei tre corpi*, un classico della Meccanica Celeste accanto a quello della dinamica del corpo rigido. A dire il vero, si dovrebbe tener conto dell'azione di tutti i Pianeti, ma D'Alembert mostra che quella di Giove è 64000 volte più piccola di quella del Sole, e dunque la si può trascurare; lo stesso vale, a maggior ragione, per i Pianeti restanti.

La scrittura delle equazioni è operazione alquanto laboriosa: tutto il calcolo è svolto scomponendo le forze che la Terra e il Sole esercitano sulla Luna in due componenti, una nella direzione Terra-Sole, l'altra nella direzione Luna-Terra. La prima componente obbliga la Luna a seguire la Terra nella sua orbita; la seconda è causa del moto della Luna rispetto alla Terra, e delle deviazioni dal moto ellittico. È un calcolo che possiamo definire abbastanza spontaneo, e tutto sommato non particolarmente complesso se si introduce il baricentro del sistema Terra Luna e se si fa uso di coordinate e degli strumenti del calcolo vettoriale. La difficoltà è dovuta soprattutto alla mancanza di quegli strumenti, il che rende necessario il ricorso a tecniche puramente geometriche e a figure di non facile lettura. Ma questo, a conti fatti, non è un ostacolo enorme: in un modo o nell'altro, alla fine si ottengono delle equazioni differenziali per le quantità che si vogliono calcolare.

Le complicazioni più gravi sorgono nel momento in cui si vogliano risolvere le equazioni ottenute: è questo il vero problema della Meccanica Celeste, ancor oggi oggetto di studio e in qualche senso irresolubile, come ci ha spiegato Poincaré un secolo e mezzo dopo D'Alembert.

La difficoltà è duplice. In primo luogo si deve necessariamente cercare una soluzione approssimata, richiedendo che sia il più vicina possibile a quella esatta, che ci è sconosciuta. In secondo luogo, e questo è ancor più difficile, occorre separare i termini che devono essere necessariamente mantenuti da quelli molto piccoli, e dunque trascurabili.

Vediamo in breve il procedimento, cercando di mettere in evidenza i punti rilevanti. In prima approssimazione si assume che l'orbita della Luna sia circolare; poi si cercano delle correzioni periodiche. Si

ripropone in pratica, in termini più sofisticati, il metodo degli epicicli dell'astronomia antica – ma questo D'Alembert non lo dice e forse neppure lo pensa. In termini moderni, possiamo ben dire che cerchiamo uno sviluppo in serie trigonometriche del tempo – ma la tecnica generale necessaria non è nota a D'Alembert, e verrà sviluppata anni dopo da Lagrange. In termini alquanto rozzi, e anche un po' irriverenti, possiamo dire che D'Alembert costruisce degli sviluppi in serie trigonometriche facendo ricorso a metodi artigianali – il che mostra quanto fosse paziente, intraprendente e acuto nelle sue ricerche. In ogni caso, egli arriva a stabilire che ai fini del calcolo si debbano risolvere delle equazioni che scrive nella forma

$$\mathrm{d}\mathrm{d}t + N^2 t\,\mathrm{d}z^2 + M\,\mathrm{d}z^2 = 0\,,$$

dove N^2 è un coefficiente costante e $M(z)$ è una funzione di z; si chiede di trovare la soluzione $t(z)$. Qui si vede quanto possa essere delicato il problema di selezionare i termini che non sono trascurabili; ma qui devo inserire un breve calcolo.

In termini a noi più familiari, e cambiando i simboli, possiamo scrivere l'equazione nella forma $\ddot{x}+\omega^2 x = f(t)$, con ω costante e $f(t)$ una funzione assegnata. In altre parole, abbiamo a che fare col problema ben noto delle oscillazioni forzate. Evitando una discussione generale, del resto non necessaria in questo contesto, prendiamo il caso in cui sia $f(t) = a\cos\nu t$; in effetti il calcolo di D'Alembert richiede proprio di risolvere equazioni di di questo genere quando $f(t)$ sia somma di termini periodici. Tutto dunque si concentra sulla soluzione dell'equazione

$$\ddot{x} + \omega^2 x = a\cos\nu t\,, \tag{3}$$

che nel caso $\nu \neq \omega$ ammette la soluzione particolare

$$x(t) = \frac{a}{\omega^2 - \nu^2}\cos\nu t\,. \tag{4}$$

Qui si vede con chiarezza che un termine che abbia un coefficiente a piccolo può diventare molto più grande dopo l'integrazione, se ω e ν sono molto vicini. Ancor peggiore è il caso in cui $\nu = \pm\omega$, perché si dovrà includere nella soluzione un termine $t\sin t$, con una dipendenza non periodica da t. Nel linguaggio adottato da D'Alembert questi termini contengono un *arc de cercle*; per gli astronomi sono i cosiddetti *termini secolari* di cui parlerò più avanti, nel prossimo paragrafo. In compenso, se $|\nu| - |\omega|$ è molto grande allora l'integrazione dell'equazione riduce sensibilmente la taglia del coefficiente; questo era già stato osservato da Eulero,

che da qui concludeva a favore di una convergenza abbastanza rapida delle serie trovate col procedimento di approssimazioni successive. Una conclusione, quest'ultima, da prendere con molta cautela: dopo Poincaré sappiamo che quelle serie hanno tipicamente un carattere asintotico, e non sono convergenti nel senso rigoroso della teoria di Cauchy. Ma questo né Eulero né i suoi contemporanei potevano saperlo.

Si vede dunque che nel selezionare i termini di cui tener conto non basta guardare il coefficiente che compare nell'equazione: è indispensabile controllare che quel coefficiente resti piccolo anche dopo l'integrazione. Il ricorso a un procedimento di approssimazioni successive introduce una complicazione ulteriore: la soluzione ottenuta in prima approssimazione deve essere risostituita nell'equazione, e poi le funzioni ottenute devono essere sviluppate nuovamente in serie trigonometriche che rappresentano la nuova funzione $f(t)$ nell'equazione. Tali termini devono a lora volta essere sottoposti a integrazione, e cosí via. Tutto ciò comporta che un termine che a prima vista sembra trascurabile possa produrre contributi rilevanti più avanti, nel corso del procedimento: una propagazione difficile da controllare. Si pongono dunque due domande: *quali sono i termini effettivamente trascurabili? e fin dove deve essere portato avanti il procedimento di approssimazioni successive?* Due domande che sono ancora attuali, e la teoria del moto della Luna mette subito in evidenza quanto esse siano rilevanti.

Il problema si presenta in modo inequivocabile nello studio della precessione dell'apogeo lunare. In questa occasione D'Alembert dà un resoconto dettagliato dei fatti, che riassumo se non altro perché ci offre uno spaccato delle relazioni tra due protagonisti di quell'epoca. Il 15 novembre 1747 Clairaut presenta all'Académie una memoria in cui svolge il calcolo della precessione, ma trova un risultato che è circa la metà di quella osservata. La sua conclusione è che si debba correggere la legge di gravitazione newtoniana. La notizia suscita un certo scalpore nell'ambiente scientifico: non dimentichiamo che in quel periodo la gravitazione di Newton era ancora oggetto di discussione. D'Alembert, avendo svolto indipendentemente lo stesso calcolo, ha trovato un risultato simile su cui però nutre qualche dubbio, e infatti non lo ha pubblicato. Rivela pure di aver ricevuto una lettera in cui Maupertuis gli comunica che anche Eulero era incappato in precedenza nello stesso problema. Sta di fatto che Clairaut insiste perché la sua memoria venga pubblicata rapidamente, nel volume delle memorie del 1745. D'Alembert, per tutta risposta, modifica il testo di una memoria sui moti planetari presentata il 23 giugno 1747, aggiun-

gendo il calcolo per l'apogeo della Luna. In seguito chiede che il testo modificato venga pubblicato contemporaneamente alla memoria di Clairaut, anche se non è stato comunicato a una seduta dell'Académie. Così avviene infatti: la memoria di Clairaut si trova alle pagg. 329-364, seguita da quella di D'Alembert alle pagg. 365-390. Ambedue gli autori hanno aggiunto qualche osservazione per precisare che nessuno era a conoscenza del lavoro svolto contemporaneamente dall'altro. In calce alla memoria di D'Alembert si trova una postilla assolutoria: *"Quoique les deux Mémoires précédens de M*rs *Clairaut & D'Alembert, n'aient été lûs à l'Académie que dans le courant de l'année 1747, on a jugé à propos de les publier dans le volume de cette année."*

C'è un seguito, sempre narrato da D'Alembert. Il 17 maggio 1749 Clairaut comunica all'Académie che avendo ripreso il calcolo svolto nella memoria presentata in precedenza ha trovato risultati in accordo con le osservazioni (anche di questo si trova traccia nelle ultime pagine del volume di memorie del 1745). D'Alembert viene a sapere, dallo stesso Clairaut, che il risultato è ottenuto migliorando l'approssimazione, e in particolare tenendo conto di certi termini che in un primo tempo erano stati trascurati. Più avanti, avendo svolto il calcolo con le correzioni suggerite da Clairaut, egli verifica che ancora non basta: il valore ottenuto è inferiore di circa 30′ al dato osservato per l'intera rivoluzione dell'apogeo. Quindi incrementa ancora l'ordine di approssimazione, calcolando altri termini, e finalmente ottiene un risultato che considera soddisfacente.

Al di là di tutte le vicissitudini che ho narrato, resta un'osservazione fatta dallo stesso D'Alembert: *la scelta del grado di approssimazione può avere effetti rilevanti sul risultato; d'altra parte non c'è un criterio semplice per stabilire dove fermarsi, salvo il confronto con le osservazioni.*

La conclusione finale di D'Alembert è che le piccole differenze riscontrate tra il calcolo teorico e le osservazioni non mettono in discussione la legge di gravitazione: a suo parere, eventuali piccole differenze residue possono essere eliminate includendo altri termini trigonometrici nel calcolo, così da migliorare ulteriormente il risultato; le serie calcolate, osserva, convergono abbastanza bene, come sosteneva anche Eulero. Egli dunque adotta senz'altro il modello newtoniano. Pure Clairaut, da parte sua, si convince della correttezza del modello, e rinuncia a introdurre le correzioni alla legge di gravità che aveva proposto in precedenza; il tutto non senza uno scambio polemico con Georges-Louis Leclerc, Comte de Buffon (1707-1788), riportato alle pagine 577-587 del volume delle memorie del 1745.

Recherche de l'orbite des Planetes principales dans le ſyſtême de l'Attraction.

Obſervations générales & préliminaires. page 1
CHAPITRE I. *DU changement que l'action de la Lune doit produire dans le mouvement de la Terre.* 3
CHAP. II. *De la variation du Soleil en latitude, cauſée par l'action de la Lune.* 27
Regle pour déterminer la variation du Soleil en latitude. 33
CHAP. III. *Application de notre Méthode à la recherche des orbites des Planetes principales, en ayant égard à leur action mutuelle.* 40
Obſervations générales ſur la maniére dont on doit déterminer l'orbite d'une Planete principale. 42
Limites de la Série A. page 72
Limites de la Série B. 77
Du mouvement des nœuds & de l'inclinaiſon de l'orbite des Planetes premieres. 97
Du changement de la Terre en latitude, occaſionné par l'action de Jupiter. 103
De la comparaiſon de la Théorie de Saturne avec les obſervations, & des élémens de cette Théorie. 104
CHAP. IV. *De l'orbite des Planetes dans l'eſpace abſolu.* 112
Maniére très-ſimple de trouver le mouvement du Soleil dans l'eſpace abſolu. 128
CHAP. V. *Autre maniére de réſoudre l'équation générale du Problême des trois corps, avec quelques conſéquences qui en réſultent.* 129
CHAP. VI. *Application de notre ſolution générale à différentes hypotheſes.* 136
§. I. *Conſtruction de la trajectoire dans le cas où* $\pi = 0$, *& où* Ψ *eſt proportionnelle à une fonction quelconque du rayon* x. 137
§. II. *Analyſe de quelques cas où* π *n'eſt pas* $= 0$. 146
§. III. *Des Trajectoires décrites dans un milieu réſiſtant.* 150

Fig. 15. L'indice del secondo volume del Système du monde, dedicato ai moti planetari.

Application de notre Méthode à la recherche des orbites des Planetes principales, en ayant égard à leur action mutuelle.

209. IL y a trois différentes cauſes qui peuvent altérer le mouvement des Planetes principales; ſavoir 1°. l'Attraction mutuelle de ces Planetes, dont l'effet ſe fait appercevoir d'autant plus ſenſiblement qu'elles ſont plus groſſes & plus proches les unes des autres, comme il arrive dans Saturne & dans Jupiter. 2°. L'Attraction que ces mêmes Planetes exercent ſur le Soleil, & qui empêchant cet Aſtre d'être abſolument immobile, fait qu'indépendamment de toute autre action, elles ne décrivent point autour de lui des orbites exactement Elliptiques. 3°. Enfin l'Attraction que les Satellites d'une Planete peuvent exercer ſur elle, comme celle que la Lune exerce ſur la Terre; action qui peut être plus ou moins ſenſible ſuivant la maſſe des Satellites.

Fig. 16. L'impostazione del problema dei moti planetari.

Alla fine del trattato D'Alembert pubblica delle nuove tavole per il calcolo delle posizioni della Luna, e lascia agli astronomi il compito di verificarne l'attendibilità, anche confrontandole con altre tavole allora disponibili.

Il problema del calcolo dell'orbita lunare viene ripreso nella terza parte, libro quarto delle *Récherches sur le Systême du monde*. Si tratta di correzioni e miglioramenti del calcolo svolto nel libro primo, sui quali non mi dilungo.

4.4 I moti planetari

La questione dei moti planetari è studiata ampiamente nella parte seconda, libro secondo della *Recherches*; l'indice è riportato in *Fig. 15*. Il titolo dichiara apertamente la completa adesione dell'autore al modello newtoniano: *Recherche de l'orbite des planetes pincipales dans le systême de l'attraction.* Il primo problema che si presenta è, ovviamente, la scrittura delle equazioni: occorre tener conto dell'azione di ciascun corpo sugli al-

tri, come descritto nel brano riportato in *Fig. 16*. Si noti che D'Alembert, coerentemente con la sua impostazione generale della Meccanica, non fa uso del concetto di forza, e di conseguenza neppure del principio di azione e reazione; inoltre l'azione di un corpo su un altro viene descritta in termini della sola *accelerazione* del secondo, non in termini del prodotto massa per accelerazione come nello schema newtoniano. Ciò rende necessaria qualche acrobazia nel tener conto dell'azione di un Pianeta sul Sole; D'Alembert rimuove quell'azione trasportandola indietro in senso contrario sul Pianeta, il che aggiunge qualche complicazione tecnica.

Il problema posto da D'Alembert può considerarsi come un ampliamento delle sue ricerche sull'orbita della Luna. Mentre in quel caso la sua attenzione si concentrava sul moto della Luna rispetto alla Terra, considerata quest'ultima come fissa, qui egli intende studiare quello che chiameremmo *problema generale dei tre corpi*, il che include anche le perturbazioni dell'orbita di un Pianeta – qui la Terra – dovuta alla presenza di un satellite.

I primi due capitoli sono dedicati al caso Terra-Luna-Sole. Il risultato principale è che il baricentro del sistema formato dalla Terra e dalla Luna si muove su un'ellisse intorno al Sole, sicché lo studio precedente del moto lunare rispetto alla Terra risulta giustificato. Nel seguito D'Alembert estende al caso dei Pianeti maggiori le tecniche di approssimazione che aveva sviluppato per la teoria della Luna. Qui è interessante vedere il contesto storico, prestando qualche attenzione al punto di vista di D'Alembert come egli stesso lo espone.

Le *ineguaglianze* dei Pianeti, ovvero le deviazioni dei moti planetari rispetto alle orbite ellittiche, erano già state osservate da Keplero [15], che ne aveva fatto cenno in alcune lettere, riferendosi in particolare al caso di Giove e Saturno. Newton, a sua volta, aveva osservato nei *Principia* che l'azione di Giove su Saturno poteva avere effetti rilevanti. All'inizio del secolo XVIII di questi fenomeni si sapeva abbastanza poco, anche perché Keplero, pur avendo promesso e preparato una prima versione di un opuscolo sull'argomento, non l'aveva pubblicata [8].

Nella prima metà del secolo XVIII l'accumulo di osservazioni e la disponibilità dei telescopi aveva confermato l'esistenza di ineguaglianze. Si poneva dunque in modo sempre più pressante il problema di stabilire se la teoria di Newton potesse renderne ragione. La questione non era così semplice: era indispensabile avere a disposizione sia un calcolo teorico attendibile, sia delle osservazioni sufficientemente precise che fornissero una valutazione quantitativa affidabile dell'entità delle deviazioni

osservate. Ora, né l'una né l'altra cosa erano effettivamente disponibili. I metodi dell'Analisi erano ancora in fase di sviluppo; le osservazioni, pur aumentate in modo considerevole sia in numero che in precisione, erano ancora troppo scarse, perché la determinazione di quantità che riguardano moti secolari richiede osservazioni distribuite su un arco temporale di secoli. Era dunque necessario combinare in modo efficace i dati osservativi con le previsioni teoriche: questo era ben chiaro a D'Alembert.

Date le premesse, non c'è ragione di stupirsi se il caso studiato con maggiore attenzione è quello di Saturno. Secondo D'Alembert questi sono i fatti:

(i) il moto di Saturno sembra rallentare di secolo in secolo;
(ii) inoltre si osserva una irregolarità che dipende dalla configurazione di Saturno rispetto a Giove.

In sintesi, l'ineguaglianza di Saturno presenta una variazione proporzionale al tempo, a cui si sovrappone una variazione periodica. Questi fatti si deducono dall'analisi di coppie di osservazioni distanziate di 59 anni e un giorno (corrispondenti approssimativamente a 5 orbite di Giove e 2 di Saturno): si confrontano i dati osservati con le previsioni del calcolo, e si osserva una deviazione proporzionale al tempo se si selezionano coppie che corrispondono alla stessa posizione relativa dei due Pianeti, mentre la variazione periodica caratterizza l'insieme di tutte le coppie e riflette l'oscillazione della distanza tra i due Pianeti. Qui l'attenzione è concentrata su Saturno, ma anche Giove è soggetto a ineguaglianze simili: il suo moto sembra accelerare in concomitanza col rallentamento di Saturno.

Dato il grande interesse della questione, l'Académie mette a bando tre premi per lo studio del problema, negli anni 1748, 1750 e 1752. Il primo e il terzo vengono attribuiti a Eulero; il secondo non viene assegnato. D'Alembert prende in esame in modo particolare la memoria di Eulero premiata nel 1748. In essa si mettono in evidenza tre ineguaglianze principali: due periodiche dipendenti dalla differenza tra gli angoli corrispondenti alle posizioni dei due Pianeti; la terza introduce una dipendenza temporale della forma $t \sin t$ nell'equazione del raggio, ed è un termine secolare o, come lo chiama D'Alembert, *un arc de cercle*. Su quest'ultimo egli concentra la sue attenzione, ritenendolo inaccettabile: a suo parere i termini secolari dovrebbero comparire solo nel movimento dell'afelio, in analogia a quello che accade per la Luna.

In termini più precisi, la soluzione secolare nasce dal fatto che nel procedimento di approssimazione si incappa proprio nell'equazione (3) con $\nu = \omega$. Ma D'Alembert osserva che quel termine è conseguenza

dell'ipotesi, introdotta da Eulero, che gli afeli di Giove e Saturno siano fissi. Se si ammettesse un lento movimento degli afeli si otterrebbe invece un'equazione con $\nu = \omega + \alpha$ con α molto piccolo. La soluzione (4) corrispondente dipenderebbe periodicamente dal tempo come $\sin(\omega + \alpha)t$ con un coefficiente molto grande dell'ordine di $1/\alpha$, ma non conterrebbe più un termine secolare. Se poi si considerassero gli istanti di tempo per cui $\omega t = 2n\pi$, multiplo di 2π, allora si avrebbe un termine che si comporta come $\frac{\sin n\alpha}{\alpha}$, ossia un comportamento oscillante con grande ampiezza ma con periodo molto lungo. Qui ω rappresenta il moto medio di Saturno, sicché gli istanti considerati possono identificarsi col ritorno di quel Pianeta all'afelio, circa ogni 30 anni.

Purtroppo il valore di α dovrebbe essere fornito dalle osservazioni che, come ho già detto, coprono un arco temporale troppo breve; a D'Alembert non resta che avanzare qualche congettura. Ad esempio, supponendo $\frac{\alpha}{\omega} = \frac{40''}{360°}$ si dovrebbe osservare un'ineguaglianza crescente per un tempo $90 \times 30 \times 36$ anni, e poi una decrescita per un intervallo di tempo doppio; difficile verificarla con osservazioni distribuite su pochi decenni! Ad ogni modo il fatto interessante è che si possa attribuire la variazione secolare, apparentemente lineare nel tempo, a una perturbazione di lungo periodo. Non si può dire che l'enigma dell'ineguaglianza di Saturno sia stato risolto né da Eulero nelle sue memorie, né da D'Alembert nel suo trattato; ma si tratta comunque di riflessioni interessanti che costituiscono un passo utile.

5. Dopo D'Alembert

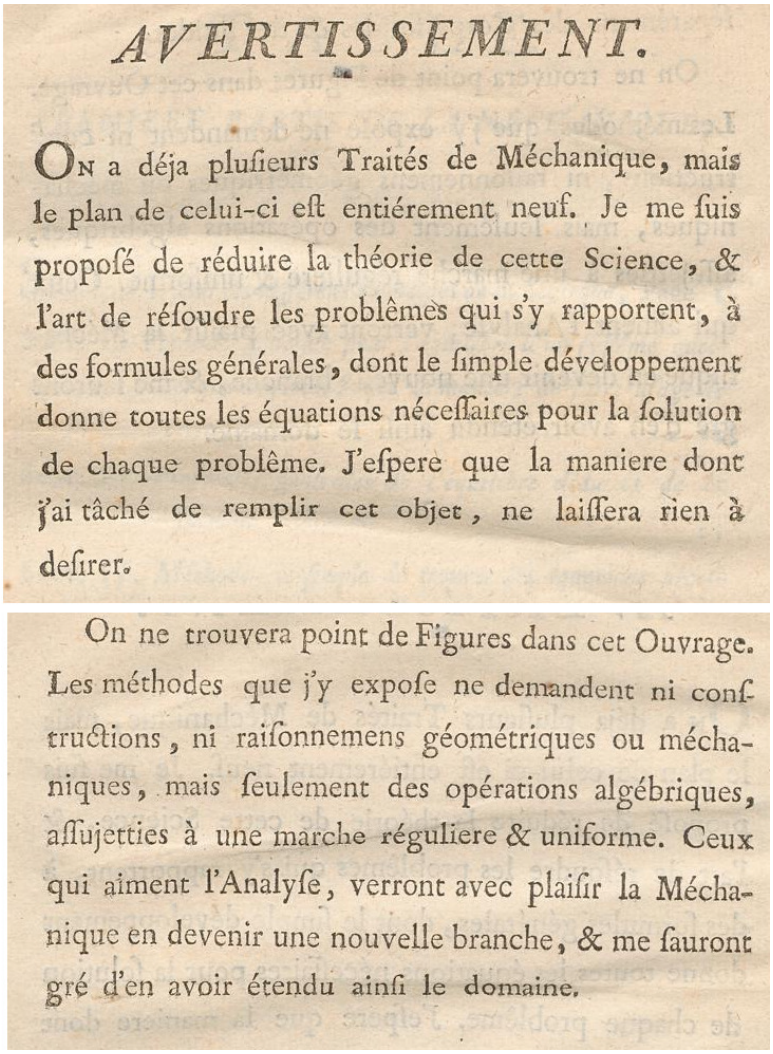
Credo sia interessante aggiungere a questa esposizione qualche breve nota sugli sviluppi successivi, in particolare quelli in qualche modo collegati alla *Dynamique* e alle ricerche astronomiche.

Cominciamo dalle ultime. Il problema dei moti planetari viene ripreso da Lagrange in una memoria presentata all'Académie il 13 dicembre 1774. Vi si trova una teoria completa per la precessione dei nodi e l'evoluzione delle inclinazioni delle orbite dei Pianeti [10]. Laplace, venuto a conoscenza della memoria di Lagrange, estende immediatamente il calcolo all'evoluzione dei perieli e delle eccentricità, e pochi mesi dopo presenta una sua memoria [13]. Curiosamente, la memoria di Laplace viene pubblicata qualche anno prima, ma i meriti di Lagrange vi sono pienamente riconosciuti. Comunque sia, la memoria di

Lagrange citata e due altre pubblicate successivamente introducono *ex novo* dei metodi analitici che diventano un paradigma di riferimento per i secoli successivi [11][12]. Quanto all'ineguaglianza di Giove e Saturno, per avere una soluzione soddisfacente bisogna attendere il 1785, quando Laplace presenta una sua memoria sull'argomento [14]. L'osservazione cruciale è che il rapporto tra i periodi dei due Pianeti è vicino a $5/2$; la prossimità alla risonanza genera una perturbazione significativa con un periodo di circa 900 anni.

L'evoluzione della *Dynamique* è più interessante: ha lasciato una traccia profonda nei secoli successivi, perché l'impostazione di Lagrange è diventata di fatto lo standard per la maggior parte dei trattati di Meccanica, fino ai nostri giorni. Nel 1788 viene pubblicata la prima edizione della *Méchanique Analytique*. L'autore stesso afferma che si tratta di un'impostazione del tutto nuova rispetto a quelle tradizionali: lo si vede nel brano riportato in *Fig. 17*. A differenza di D'Alembert egli ripristina il concetto di forza. Inoltre, e questo è un punto cruciale, introduce l'uso di coordinate in forma generale – che noi oggi chiamiamo *coordinate generalizzate* o *Lagrangiane*. La trattazione analitica e la generalità del metodo semplificano in modo radicale la scrittura delle equazioni della Meccanica. Ma, come lo stesso Lagrange non manca di spiegare dettagliatamente, il punto di partenza è proprio quello che viene chiamato *Principio di D'Alembert*: si decompone la forza (anziché la velocità) in una componente distrutta dai vincoli e una seconda che è la sola capace di generare accelerazione. Il trattamento elegante ed efficace della geometria tramite il ricorso alle coordinate generalizzate elimina le costruzioni geometriche complesse che troviamo in D'Alembert. L'introduzione di quelle che noi chiamiamo *equazioni di Lagrange* semplifica in modo drastico la scrittura delle equazioni di moto. Tutto questo ha fatto del formalismo di Lagrange lo strumento principe per la trattazione di una vasta classe di problemi di Meccanica.

Si deve anche osservare che Lagrange, nella prima pagina del suo trattato, si proclama orgoglioso di aver scritto un testo di Meccanica senza far ricorso neppure a una figura. Può suonare strano, dato che queste abbondano nei testi più recenti; del resto si deve riconoscere che una buona figura favorisce largamente la comprensione. Come osservazione personale, devo dire che rimasi molto sorpreso quando, diversi anni fa, trovai all'inizio della *Méchanique* la frase che riporto nella seconda metà di *Fig. 17;* ma devo anche aggiungere che leggendo la *Dynamique* di D'Alembert, mentre preparavo la conferenza che ha dato origine alla nota



AVERTISSEMENT.

ON a déja pluſieurs Traités de Méchanique, mais le plan de celui-ci eſt entiérement neuf. Je me ſuis propoſé de réduire la théorie de cette Science, & l'art de réſoudre les problêmes qui s'y rapportent, à des formules générales, dont le ſimple développement donne toutes les équations néceſſaires pour la ſolution de chaque problême. J'eſpere que la maniere dont j'ai tâché de remplir cet objet, ne laiſſera rien à deſirer.

On ne trouvera point de Figures dans cet Ouvrage. Les méthodes que j'y expoſe ne demandent ni conſtructions, ni raiſonnemens géométriques ou méchaniques, mais ſeulement des opérations algébriques, aſſujetties à une marche réguliere & uniforme. Ceux qui aiment l'Analyſe, verront avec plaiſir la Méchanique en devenir une nouvelle branche, & me ſauront gré d'en avoir étendu ainſi le domaine.

Fig. 17. L'incipit della Méchanique Analytique di lagrange, nella prima edizione.

presente, ho capito le ragioni di Lagrange. Ciononostante devo ammettere che nei molti anni del mio insegnamento non ho mai lesinato le figure – al pari di molti miei colleghi.

A conclusione di questa nota mi sia consentito riportare la citazione che D'Alembert pone a chiusura del terzo e ultimo volume del *Système du Monde*, riprendendo *ce qu'un Ecrivain éloquent & Philosophe a dit de son siécle, qui à plusieurs regards ressemblait aussi au nôtre.*

> *"Nec omnia apud priores meliora, sed nostra quoque ætas quædam artium & laudis imitanda posteris tulit."*
>
> *(Tacitus, Annalium liber III)*

Appendice A. Le coordinate celesti e gli elementi orbitali dei pianeti

In questa appendice esporrò brevemente alcune nozioni indispensabili per comprendere il lavoro di D'Alembert. Agli occhi di un lettore esperto di astronomia questa appendice apparirà affrettata e ingenua; mi giustifico dicendo che è quanto basta, a mio parere, per comprendere quali siano i problemi affrontati da D'Alembert. Mi soffermerò in particolare su due punti:

(i) Le coordinate celesti e i cataloghi delle stelle.
(ii) La rappresentazione delle orbite dei pianeti e le ineguaglianze.

Il riferimento standard per le osservazioni astronomiche ci viene fornito dal *cielo delle stelle fisse*. Nell'astronomia antica, e successivamente fino a Newton e oltre, questo viene concepito come una sfera sulla quale sono collocate le stelle, la cui posizione relativa visibilmente non muta nel tempo; il fenomeno della parallasse stellare è stato studiato solo a partire dalla fine del secolo XVII. Il Sole, la Luna e i Pianeti si muovono rispetto alle stelle fisse, e il primo compito dell'astronomia è descrivere quei movimenti e prevedere i fenomeni celesti, ad esempio le eclissi.

Il primo passo consiste nell'introdurre un sistema di coordinate sulla sfera delle stelle fisse. La scelta piu semplice consiste nel proiettare su quella sfera le coordinate geografiche, latitudine e longitudine, che usiamo abitualmente sulla superficie della Terra; nel fare questa operazione nulla ci vieta di agire come se la Terra fosse al centro dell'Universo, perché, diceva già Copernico, la distanza delle stelle è di molto maggiore di quella del Sole. La latitudine di una stella è l'angolo rispetto al polo Nord (che nella nostra epoca si trova in prossimità delle Stella Polare). La longitudine è l'angolo misurato sull'*equatore celeste*, il cerchio massimo formato dai punti a 90° rispetto al Polo Nord, che è poi la proiezione

dell'equatore terrestre sulla sfera. Il problema è fissare lo zero della longitudine, il che richiede a sua volta una breve discussione.[2]

Sulla sfera celeste, oltre all'equatore si identifica la circonferenza su cui si verificano le eclissi, sia di Luna che di Sole: è detta *Eclittica*, e coincide con il percorso apparente del Sole durante l'anno, come visto dalla Terra. Nel sistema eliocentrico è il cerchio percorso dalla Terra, vista dal Sole. L'eclittica è inclinata di circa $23^\circ\,30'$ rispetto all'equatore celeste, e lo interseca in due punti diametralmente opposti, che vengono detti *nodi*; questi punti rappresentano la posizione del Sole in corrispondenza agli equinozi. Il punto corrispondente all'equinozio di primavera viene chiamato convenzionalmente *punto* γ o *punto vernale*, e a esso viene assegnata la longitudine zero. Il riferimento risulta così fissato.

Si procede poi a misurare le coordinate delle stelle fisse. Ad esempio, per le stelle vicine all'equatore si può stabilire la longitudine con buona precisione sfruttando le eclissi. Per le altre, occorre identificare il meridiano su cui si trova a stella. Si tratta comunqe di operazioni che si possono portare a termine facendo uso di strumenti quali gnomone, astrolabio o sfere armillari, disponibili agli astronomi greci. I dati vengono poi rielaborati facendo uso di metodi geometrici, tra cui la trigonometria sferica. In tal modo si possono compilare dei *cataloghi stellari*, contenenti le coordinate di un certo numero di stelle (le più luminose). La classificazione delle stelle in costellazioni risponde anche all'esigenza di identificare rapidamente delle regioni del cielo. La compilazione di cataloghi di stelle fisse con le loro coordinate è uno dei compiti svolti a più riprese e con miglioramenti successivi dagli astronomi antichi, e sempre attuale.

I moti di Luna e Pianeti vengono descritti tramite le loro coordinate sulla sfera celeste, determinate confrontando la posizione dell'oggetto che ci interessa rispetto alle stelle fisse. Del resto questo è il procedimento che si usa ancor oggi per classificare asteroidi, comete o comunque tutti gli oggetti che vediamo nel cielo. Dobbiamo tener presente che noi possiamo osservare solo la latitudine e la longitudine di un oggetto sulla sfera celeste; le distanze non sono osservabili direttamente, ma devono essere calcolate ricorrendo a metodi geometrici; Keplero potè farlo grazie alle osservazioni di Tycho Brahe.

Veniamo alla rappresentazione delle orbite nel sistema geocentrico. Nella descrizione di Keplero i Pianeti (compresa la Terra) si muovono cia-

[2] Lo stesso problema si pone per le coordinate geografiche sulla Terra: tutti sappiamo che per convenzione si misura la longitudine a partire dal meridiano di Greenwich.

scuno su un piano cha passa per il Sole. La traiettoria, vista dal Sole, è una circonferenza sulla sfera delle stelle fisse. I piani delle varie orbite non coincidono tra di loro e con l'eclittica (che, ricordiamolo, è la traiettoria della Terra). Ciascuna circonferenza interseca l'eclittica in due punti, che vengono detti *nodi*. Il piano dell'orbita di un pianeta viene identificato da due quantità: l'*inclinazione*, ossia l'angolo che quel piano forma con l'eclittica, e la *longitudine del nodo ascendente*, ossia la longitudine del punto in cui il pianeta attraversa l'eclittica passando dall'emisfero a sud a quello a nord, misurata rispetto al punto γ; in tal modo la longitudine del nodo terrestre è zero, per definizione; quella degli altri Pianeti non è nulla.

Per dire di più diventa indispensabile sganciarsi dalla rappresentazione della traiettoria rispetto alle stelle fisse, e tener conto anche della distanza del Pianeta dal Sole; in altre parole: ricostruire la forma dell'orbita nello spazio, o meglio nel piano su cui si muove il Pianeta. Questa è l'operazione che Keplero ha potuto compiere grazie alla notevole precisione delle osservazioni di Tycho Brahe: l'errore era stato ridotto dai circa $10'$ delle osservazioni visuali a meno di $2'$. Qui interviene la prima legge di Keplero, che ben conosciamo: l'orbita è *un'ellisse* che ha il Sole in uno dei fuochi. La determinazione dell'ellisse richiede tre quantità: il *semiasse maggiore* dell'ellisse, che rappresenta in pratica la distanza media del Pianeta dal Sole; l'*eccentricità*, che rappresenta la distanza del Sole dal centro dell'ellisse divisa per il semiasse maggiore, e quindi lo schiacciamento rispetto a una circonferenza; la direzione del *perielio* rispetto al nodo, che dà l'orientamento dell'ellisse. Opposto al perielio si trova l'*afelio*, e la retta (passante per il Sole) che congiunge perielio e afelio viene detta *linea degli apsidi*. Tutte queste informazioni hanno carattere puramente geometrico: le ellissi del modello kepleriano sono fisse nel tempo.

Il moto del Pianeta sull'ellisse viene descritto dalla seconda legge di Keplero, o *legge delle aree*: il raggio che congiunge il Sole col Pianeta spazza aree equali in tempi eguali. La quantità rilevante è il *periodo* del Pianeta, che si può misurare con precisione elevata accumulando osservazioni per diversi secoli.

L'orbita della Luna, in prima e alquanto rozza approssimazione, è anch'essa ellittica, ma nel fuoco dell'ellisse si trova la Terra, e non il Sole.

Riassumendo, nella descrizione di Keplero entrano cinque quantità che sono costanti: l'inclinazione, la longitudine del nodo ascendente, l'eccentricità, la direzione del perielio e il semiasse maggiore; tali quantità vengono dette *elementi orbitali*, e sono pubblicate nei cataloghi degli oggetti celesti, ad esempio gli asteroidi. Il moto sull'ellisse non è uni-

forme: il pianeta si muove più velocemente al perielio rispetto all'afelio. Quest'ultima *ineguaglianza* era descritta dagli astronomi greci mediante gli equanti. La forma ellittica dell'orbita giustifica, ad esempio, la variazione del diametro apparente del Sole e della Luna come visti dalla Terra: in ambedue i casi il diametro è circa 30′ (mezzo grado), ma non è costante. La seconda legge, insieme alla prima, rende conto del fatto che nell'emisfero nord della Terra la stagione estiva (dall'equinozio di primavera a quello di autunno) è di poco più lunga di quella invernale: ciò è stato osservato da Eratostene (circa 274−194 aC). Inoltre, sempre in conseguenza della seconda legge di Keplero, la durata del giorno solare non è costante nel corso dell'anno; in effetti abbiamo imparato alle scuole superiori che il secondo viene definito come la 86400^{ma} parte del giorno solare *medio*; l'aggettivo è indispensabile.

Le ineguaglianze dei moti planetari vengono descritte ammettendo che i cinque elementi orbitali non siano in realtà fissi, ma possano variare lentamente nel tempo. Gli astronomi fanno uso del concetto di *ellisse osculatrice*: a un determinato istante si danno i parametri dell'ellisse che verrebbe descritta dal Pianeta se in quel momento si rimuovessero tutte le azioni di disturbo, lasciando solo l'azione del Sole. La *teoria delle perturbazioni secolari*, sviluppata a partire dal secolo XVIII dagli autori che ho più volte citato, ha lo scopo di calcolare l'evoluzione di tali elementi. L'aggettivo secolare sta a indicare che l'evoluzione è molto lenta, e diventa osservabile sull'arco di secoli. Questo è il problema trattato nel paragrafo 4.4. Grazie a quella teoria Lagrange, seguito a breve da Laplace, ha mostrato ad esempio che i nodi e i perieli delle orbite planetarie sono soggetti a una precessione molto lenta, con periodi che vanno da qualche secolo a oltre un milione di anni, a seconda dei casi.

Fa eccezione la teoria della Luna: la sua vicinanza alla Terra fa sì che le deviazioni rispetto all'orbita ellittica siano decisamente consistenti. Come ho detto nel testo una rivoluzione completa del nodo dell'orbita lunare si completa in circa 18,6 anni, ed è responsabile del ciclo periodico delle eclissi; l'apogeo compie una rotazione in poco meno di 9 anni. In effetti la teoria del moto della Luna ha rappresentato a lungo un problema alquanto complesso per gli astronomi; ne è stata data una versione soddisfacente solo alla fine del secolo XIX da George William Hill (1838−1914), seguito qualche anno dopo da Ernest William Brown (1866−1938). Le teorie di Newton e di D'Alembert di cui si parla nel paragrafo 4.3 sono i primi passi verso lo sviluppo di una teoria completa.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. Bradley and G. Sarton: *Discovery of the Main Nutation of the Earth's Axis*, Isis **37**, 333-383 (1932).

[2] Jean le Rond D'Alembert: *Traité de dynamique*, David l'ainé libraire, Paris, (1743).

[3] Jean le Rond D'Alembert: *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides*, David l'ainé libraire, Paris, (1744).

[4] Jean le Rond D'Alembert: *Recherches sur la précession des equinoxes et sur la nutation de l'axe de la terre dans le sytème Newtonien*, David l'ainé libraire, Paris, (1749).

[5] Jean le Rond D'Alembert: *Recherches sur differens points importans du système du monde*, 3 vol., David l'ainé libraire, Paris, (1754-1756).

[6] Jean le Rond D'Alembert: *Traité de dynamique*, seconda edizione, David libraire, Paris, (1758).

[7] Jean le Rond D'Alembert: *Recherches sur la courbe que forme une corde tenduë, mise en vibration*, Histoire de l'Académie Royale des Sciences et belles Lettres, année MDCCXLVII, 214-219. *Suite des recherches sur la courbe que forme une corde tenduë, mise en vibration*, ibid. 219-249 (1749).

[8] A. Giorgilli: *A Kepler's note on secular inequalities*, Rendiconti dell'Istituto Lombardo Accademia di Scienze e Lettere, Classe di Scienze Matematiche e Naturali, 145, 97-119 (2011).

[9] J.L. Lagrange: *Solution de différents problèmes de calcul intégral*, Miscellanea Tauriniensia, t.III (1762-1765).

[10] J.L. Lagrange: *Recherche sur les équations séculaires des mouvements des noeuds et des inclinaisons des orbites des planètes*, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris (1774).

[11] J.L. Lagrange: *Théorie des variations séculaires des éléments des planètes. Première partie contenant les principes et les formules générales pour déterminer ces variations*, Nouveaux mémoires de l'Académie des Sciences et Belles–Lettres de Berlin (1781).

[12] J.L. Lagrange: *Théorie des variations séculaires des éléments des planètes. Seconde partie contenant la détermination de ces variations pour chacune des planètes principales*, Nouveaux mémoires de l'Académie des Sciences et Belles–Lettres de Berlin (1782).

[13] P-S. de Laplace: *Mémoire sur le principe de la gravitation universelle et sur les inégalités séculaires des planètes qui en dependent*, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris, Savants Etrangers, (1773).

[14] P-S. de Laplace: *Théorie de Jupiter et Saturne*, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris, année 1785, (1788).

[15] J. Laskar: *Lagrange et la Stabilité du Sytème Solaire*, in: G. Sacchi Landriani e A. Giorgilli (eds): *Sfogliando la Méchanique Analytique*, LED edizioni, Milano (2008).

INDICE DEL VOLUME

GENNARI C., Tumor Targeting with Integrin Ligand - Drug Conjugates 3

POLESELLO S., La gestione del ciclo delle acque tra storia, scienza e letteratura 7

CACCIATORI S.L., Gravitational waves, 100 years later 23

ARDIZZONE S., MERONI D., Materiali con bagnabilità controllata. Un'ispirazione dalla natura 59

SERRA S., Aromi naturali: legislazione e sintesi 67

CARFORA M., Stephen Hawking: space, time and quanta 75

GIORGI F., Cambiamenti climatici: evidenze scientifiche, rischi ed opportunità di mitigazione 95

BRACCO C., PROVOST J.-P., Vers une meilleure compréhension des premières idées scientifiques d'Albert Einstein – son environnement scientifique en Italie (1895-1902) 113

JENKYNS H.C., Italian geology and climate change in the deep past 155

TAVONI M., L'impatto dei cambiamenti climatici sulla crescita economica e la disuguaglianza globale 167

MINETTI A.E., Locomozione umana e animale a differenti gravità: adattamenti biomeccanici ed effetti metabolici 171

BOTTAZZINI U., Maria Gaetana Agnesi, *enfant prodige*, matematica, pia nobildonna 183

MEISINA C., Advanced Differential Interferometric SAR technique A-DInSAR for the study of large landslides 201

SACCHI LANDRIANI G., D'Alembert editore e "philosophe" 217

GIORGILLI A., D'Alembert fisico e matematico 247

INDICE PER MATERIA

Chimica

Ardizzone S., Meroni D., Materiali con bagnabilità controllata. Un'ispirazione dalla natura 59

Gennari C., Tumor Targeting with Integrin Ligand - Drug Conjugates 3

Polesello S., La gestione del ciclo delle acque tra storia, scienza e letteratura 7

Serra S., Aromi naturali: legislazione e sintesi 67

Fisica

Bracco C., Provost J.-P., Vers une meilleure compréhension des premières idées scientifiques d'Albert Einstein – son environnement scientifique en Italie (1895-1902) 113

Cacciatori S.L., Gravitational waves, 100 years later 23

Carfora M., Stephen Hawking: space, time and quanta 75

Matematica

Bottazzini U., Maria Gaetana Agnesi, *enfant prodige*, matematica, pia nobildonna 183

Medicina

Minetti A.E., Locomozione umana e animale a differenti gravità: adattamenti biomeccanici ed effetti metabolici 171

Scienze naturali

Ecologia

Giorgi F., Cambiamenti climatici: evidenze scientifiche, rischi ed opportunità di mitigazione 95

Tavoni M., L'impatto dei cambiamenti climatici sulla crescita economica e la disuguaglianza globale 167

Geologia

JENKYNS H.C., Italian geology and climate change in the deep past 155

MEISINA C., Advanced Differential Interferometric SAR technique A-DInSAR for the study of large landslides 201

GIORNATA D'ALEMBERT

SACCHI LANDRIANI G., D'Alembert editore e "philosophe" 217

GIORGILLI A., D'Alembert fisico e matematico 247

Finito di stampare nel mese di agosto 2020

Decreto Pres. Tribunale 10 gennaio 1961, n. 5504 registro cancelleria
Direttore responsabile: Adele Robbiati Bianchi